Matemáticas Robótica

ÁLGEBRA

Monomio, Polinomio, Ecuaciones

Profesor: Wilson Cachay
Móvil 809 787 0013
info@wilsoncachay.com

ÍNDICE

Reseña Histórica de François Viete

Fue político y militar francés que tenía como pasatiempo favorito la matemáticas. Puede considerársele como el FUNDADOR DEL ÁLGEBRA MODERNA. Logró la total liberación de esta disciplina de las limitaciones aritméticas, al introducir la notación algebraica.

Dió las fórmulas para la solución de las ecuaciones de sexto grado. Fue Consejero Privado de Enrique IV de Francia. Hizo del álgebra una ciencia puramente simbólica y completó el desarrollo de la trigonometría de Ptolomeo.

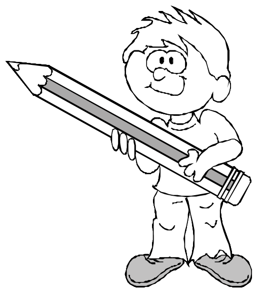
ÁLGEBRA

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN:

Es un conjunto de constantes y variables con exponentes racionales relacionados a través de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, en un número finito de veces.

Ejemplos:



$$4x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2xy + \sqrt{xy}^{\,2}$$

$$xy^{-2} + x^{-2}y + 1$$

Término Algebraico

$$\text{Signo} \longrightarrow \underbrace{-4}_{\substack{\text{Coeficiente} \\ \text{(contiene al signo)}}}\; x^{3} \longleftarrow \text{Exponente}$$

Variable

Clasificación de Expresiones Algebraicas

Monomio:

Es una expresión algebraica que tiene un solo término.

Ejemplos:

a) $5x$

b) $-2x^2y$

c) $\dfrac{xyz}{3}$

d) $\dfrac{xy^4}{3}$

POLINOMIOS

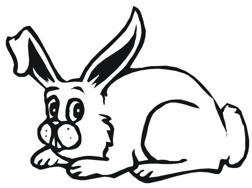
POLINOMIO:

Es una expresión algebraica que consta de dos o más términos (MONOMIOS) en una cantidad finita de estos.

A los polinomios de dos términos se les denomina BINOMIOS, a los de tres términos TRINOMIOS; a los de cuatro términos CUATRINOMIOS; en general se les llamará POLINOMIOS.

Ejemplos :

$$\left.\begin{array}{l} 5x^2 + 6x \rightarrow BINOMIO \\ 8x^3 - x^2 + 6 \rightarrow TRINOMIO \\ 7x^4 - 3x^2 + 6x - 4 \rightarrow CUATRINOMIO \end{array}\right\} \underline{POLINOMIOS}$$



I. GRADOS DE UN MONOMIO

1. GRADO ABSOLUTO DE UN MONOMIO (G.A.)

Está dado por la suma de exponentes de sus variables.

2. GRADO RELATIVO DE UN MONOMIO (G.R.)

Está dado por el exponente de la variable referida.

Ejemplo:

$$\frac{5}{7}x^2y^5z \qquad \boxed{\begin{array}{l} G.A. = 2 + 5 + 1 = 8 \\ G.R_{(x)} = 2 \\ G.R_{(y)} = 5 \\ G.R_{(z)} = 1 \end{array}}$$

II. GRADOS DE UN POLINOMIO

1. GRADO ABSOLUTO DE UN POLINOMIO (G.A.)

Está dado por el MAYOR GRADO DE LOS MONOMIOS.

2. GRADO RELATIVO DE UN POLINOMIO (G.R.)

Está dado por el MAYOR DE LOS EXPONENTES de la variable referida.

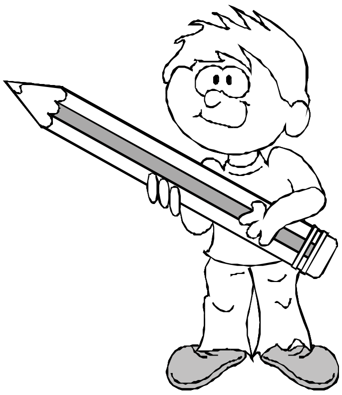
Ejemplos:

A) *Dado el Polinomio :*

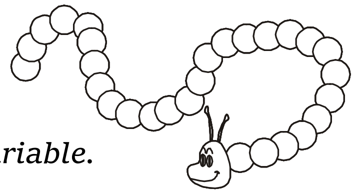
$$\underbrace{5x^3y^4}_{G.A.=7} - \underbrace{7x^2y^4}_{G.A.=6} + \underbrace{2x^6y^2}_{G.A.=8} - \underbrace{13x^4y}_{G.A.=5} \quad \therefore \quad \boxed{\begin{array}{l} G.A.=8 \\ G.R_{(x)}=6 \\ G.R_{(y)}=4 \end{array}}$$

B) *Dado el Polinomio :*

$$\underbrace{5x^4y^5z^2}_{G.A.=11} - \underbrace{6x^2y^4z^3}_{G.A.=9} + \underbrace{3x^7y^2z^5}_{G.A.=14} \quad \therefore \quad \boxed{\begin{array}{l} G.A.=14 \\ G.R_{(x)}=7 \\ G.R_{(y)}=5 \\ G.R_{(z)}=5 \end{array}}$$



PRACTIQUEMOS

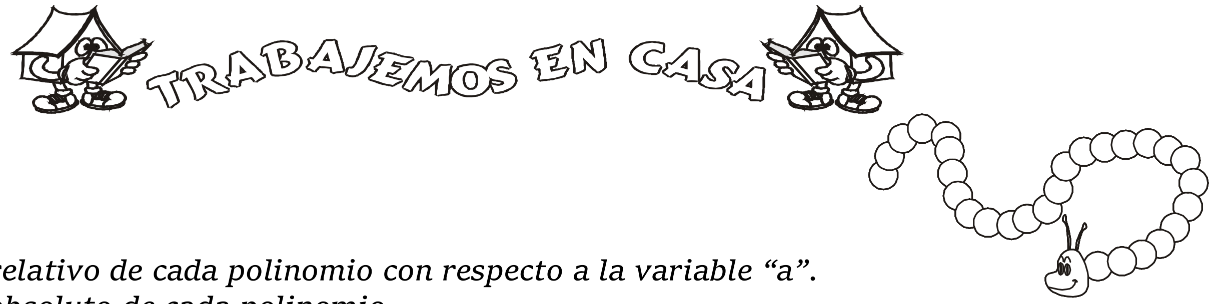


Halla:

1. *El grado relativo de cada polinomio con respecto a cada variable.*

2. *El grado absoluto de cada polinomio.*

	Polinomio	***G.R.$_{(x)}$***	***G.R.$_{(y)}$***	***G.R.$_{(z)}$***	***G.A.***
a)	$3x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 1$				
b)	$5x^3 - 6x^4 + 3x^6 - 10$				
c)	$2x^3y^4 - 4x^2y^3 + 5x^2y^6 - 11$				
d)	$\sqrt{2}x^4yz^3 - \sqrt{3}x^3y^2z^5 + 5$				
e)	$\frac{2}{3}ax^2y^3 + \frac{1}{2}a^2x^5 - \frac{1}{5}axy^7$				
f)	$8ayx^2 - 5x^4yz^5 + x^2y^3$				
g)	$5xy^3 - 6x^4y + 7x^2yz$				
h)	$x^4y^3z + x^{10}y^6 - \frac{7}{10}xy^3z^4$				
i)	$\frac{\sqrt{2}}{3}xy + \frac{3}{5}ax^2 - \frac{1}{2}xy^7z$				
j)	$7x^2y + 8xy^3 + 9xyz^4$				
k)	$5axb + 6axy + 7a^2xy$				
l)	$92x^{a+3}y^{b+2} - 0,5x^{a+5}y^{b+8} + x^{a+1}y^b$				



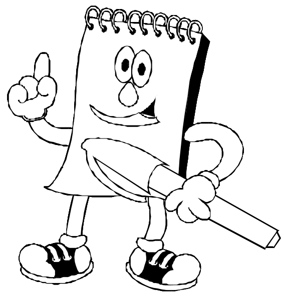
Halla:

1. *El grado relativo de cada polinomio con respecto a la variable "a".*
2. *El grado absoluto de cada polinomio.*

	Polinomio	***G.R.$_{(a)}$***	***G.A.***
a)	$7a^4b^3 + a^2x + ab^9$		
b)	$4a^3 + a^2 + ab^3$		
c)	$ax^4 + 4a^2a^3 - 6x^2y^4$		
d)	$ax^8y - y^{15} - m^{11}$		
e)	$9a^2y^7 + a^6y + 4ay^5$		
f)	$3a^2b + a^3b^4 + 4b^6$		
g)	$4a^5b + ab^2 - 11$		
h)	$a^5b^7 + \sqrt{3}a^9b^3 - 5a^{10}$		
i)	$am^4n^2 - mn^6 + ax^4y^5$		
j)	$a^6 + a^4x^2 - a^2x^4y$		
k)	$a^2b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$		
l)	$4a^6y^2 + a^2y^5 - 2x^7y^6$		

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos que tienen la misma parte variable.



Ejemplo : $\underset{\boxed{T_1}}{7x^2y^3}$; $\underset{\boxed{T_2}}{5xy^4}$; $\underset{\boxed{T_3}}{x^2y^3}$; $\underset{\boxed{T_4}}{2x^4y^4}$; $\underset{\boxed{T_5}}{8x^2y^3}$

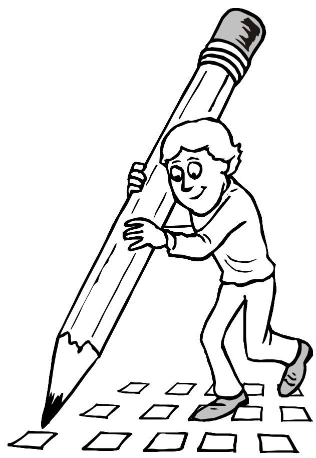
a) *Los términos* $\boxed{T_1}$, $\boxed{T_3}$ *y* $\boxed{T_5}$ *tienen la misma parte literal* $\underline{x^2y^3}$, *por lo tanto son* ***SEMEJANTES.***

b) *Los términos* $\boxed{T_2}$ *y* $\boxed{T_4}$ *no tienen la misma parte literal, por lo tanto* **NO SON SEMEJANTES.**

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES :
Es un proceso que consiste en transformar dos o más términos semejantes en uno solo, sumando o restando los coeficientes y escribiendo a continuación del resultado la misma ***PARTE VARIABLE*** *que aparece en los términos.*

Ejemplos:

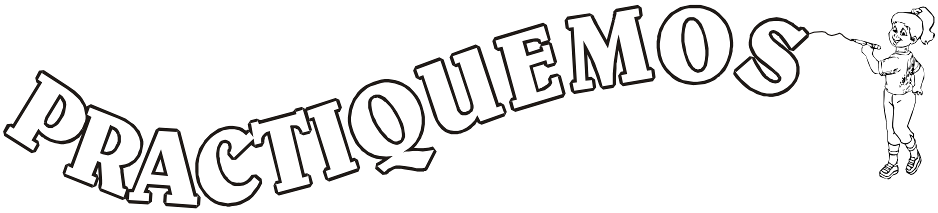
Reducir:



1. $8x^2 + 6x^2 - 3x^2 = (8 + 6 - 3)x^2 = 11x^2$

2. $\underline{13m} + \underline{6n} - \underline{7m} - \underline{4n} = (13 - 7)m + (6 - 4)n = 6m + 2n$

3. $\underline{7x^2y^7} + \underline{10xy^7} + \underline{2xy^7} - \underline{4x^2y^7} = (7 - 4)x^2y^7 + (10 + 2)xy^7 = 3x^2y^7 + 12xy^7$



Reduce los siguientes términos semejantes :

1. $9x + 7x =$

2. $8y^2 + 9y^2 =$

3. $14b^2 - 9b^2 =$

4. $m + 2m + 3n + 4n =$

5. $8a + 9b - 3a - 5b =$

6. $5a^2 + 2a^2 + 3b =$

7. $18m^2 - 9m + 5m^2 =$

8. $4a^2b + 5ab^2 - 3a^2b =$

9. $18x + 11y - 9x - 4y =$

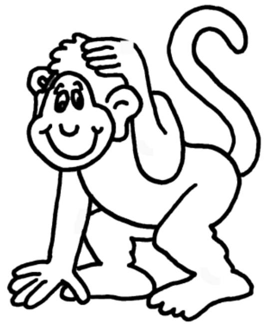
10. $9n - 7n + 8x - 3x =$

11. $19m - 10m + 6m - 2n =$

12. $x + 19x - 18x + 3x =$

13. $5a + 8a - a - 6a =$

14. $4a^x + 5a^x + 3a^y =$



15. $5ax^2 - 3a^2y + 6ax^2 =$

16. $5m^5 - 4m^4 + 2m^5 =$

17. $m^6 + 2m^4 + 3m^4 =$

18. $4xy^5 + 2xy^6 - 3xy^5 - ab^4 =$

19. $5ab^5 + 3a^2b^3 - 2ab^5 - ab^4 =$

20. $3xy^3 + 4x^2y - 2xy^3 + x^2y =$

ÍNDICE

LAGRANGE, JOSEPH LOUIS DE

El físico francés Joseph Louis, conde de Lagrange, nacido en Ene. 25, 1736, muerto en Abr. 10, 1813, fue uno de los científicos matemáticos y físicos más importantes de finales del siglo XVIII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones y más tarde lo aplicó a una nueva disciplina la Mecánica Celestial, sobre todo al hallazgo de mejores soluciones al problema de tres cuerpos. También contribuyó significativamente con la solución numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica. En su clásica Mecanique analytique (Mecánicas Analíticas, 1788), transformó las mecánicas en una rama del análisis matemático. El tratado resumió los principales resultados sobre mecánicas que se saben del siglo XVIII y es notable por su uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Otra preocupación central de Lagrange fueron los fundamentos de cálculo. En un libro de 1797 él enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Su busqueda por rigurosas fundaciones y generalizaciones le pone la base a Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel, y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Lagrange sirvió como profesor de geometría en la Escuela Real de Artillería en Turín (1755 - 66) y ayudó allí a fundar la Academia Real de Ciencias en 1757. A causa del exceso de trabajo y pobre paga, su salud desmojoró, dejándolo con una debilidad de por vida. Cuando Leonhard Euler dejó la Academia de Ciencias de Berlin, Lagrange tuvo éxito como director de la sección matemática en 1766. En 1787 salió de Berlín para llegar a ser miembro de la Academia de Ciencias de Paris, donde se mantuvo por el resto de su carrera.

Un hombre dócil y diplomático, Lagrange sobrevivió la revolución francesa. Durante los 1790s trabajo en el sistema métrico y defendió la base decimal. También enseñó en el Ecole Polytechnique, que ayudó a fundar. Napoleón lo nombró miembro de la legión de Honor y del Imperio en 1808.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

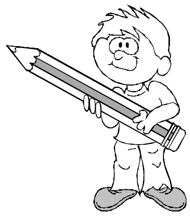
1. ADICIÓN DE POLINOMIOS

La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro del paréntesis; así:

Ejemplo: Dados los polinomios.

$A = 3x^2 + 3xy + 5y^2$

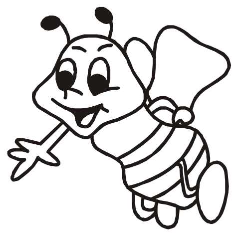
$B = x^2 - 2xy - 2y^2$



$$A + B = (3x^2 + 3xy + 5y^2) + (x^2 - 2xy - 2y^2)$$

Ahora colocamos todos los términos de estos polinomios unos a continuación de otros con sus propios signos y tendremos:

$$A + B = 3x^2 + 3xy + 5y^2 + x^2 - 2xy - 2y^2$$



$$A + B = 4x^2 + xy + 3y^2$$

Observación

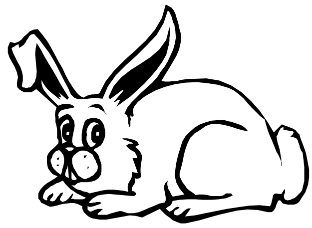
Un signo de agrupación precedido del signo (+) se elimina, sin cambiar de signo a todos los términos escritos dentro del signo de agrupación.

- *En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de otros de modo que los términos semejantes queden en columna, luego se efectúa la reducción de dichos términos.*

$$\begin{array}{rl} A = & 3x^2 + 3xy + 5y^2 \\ B = & x^2 - 2xy - 2y^2 \\ \hline A + B = & 4x^2 + xy + 3y^2 \end{array}$$

2. *SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS*

Ejemplo: Dados los polinomios:



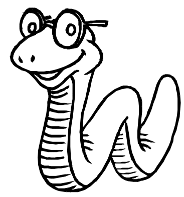
$$P = 6x^4 + 4x^2 + 4$$
$$Q = -4x^4 + 2x^2 + 3$$

- *La sustracción se indica incluyendo el sustraendo en un paréntesis precedido del signo – asi:*

$$P - Q = 6x^4 + 4x^2 + y - (-4x^4 + 2x^2 + 3)$$

Ahora dejamos al minuendo con su propio signo y a continuación escribimos el sustraendo cambiándole el signo a todo sus términos.

$$P - Q = \underline{6x^4} + \underline{\underline{4x^2}} + \underline{4} + \underline{4x^4} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3}$$



$$P - Q = 10x^4 + 2x^2 + 1$$

Observación

"Un signo de agrupación precedido del signo (–) se elimina, cambiando de signo a todos los términos escritos dentro del signo de agrupación".

En la práctica suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna, luego se efectúa la reducción de dichos términos.

$$\begin{array}{rcl} P & = & 6x^4 + 4x^2 + 4 \\ \underline{Q} & \underline{=} & \underline{+4x^4 - 2x^2 - 3} \\ P - Q & = & 10x^4 + 2x^2 + 1 \end{array}$$

PRACTIQUEMOS

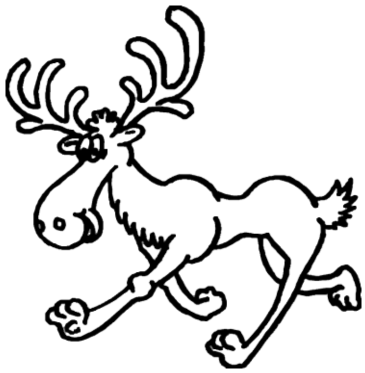
1. *Dados los polinomios :*

$A = 2x^2 + 3x^3 + 6x + 5$

$B = 4x^2 - 2x^3 - 5x - 3$

$C = 5x^3 + 4x + 3x^2 + 10$

Hallar $A + B + C$



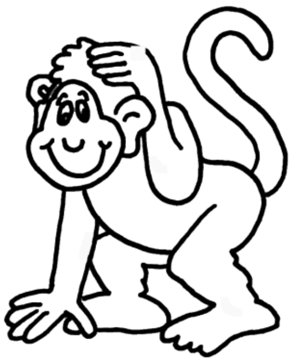
2. *Dados los polinomios :*

$A = 43x^4 + 9x^2 + 3x^3 + 2x + 10$

$B = 5x^2 - x^3 + 9 + 2x^4$

$C = 10x^4 - 8x^2 + 12x - 14$

Calcular $A + B + C$



3. *Hallar* $M - N$ *sabiendo que :*

$M = 5x^3 + 6x^2 + 4x + 9$

$N = 4x^2 + 2x + 2$

4. *Hallar A – B sabiendo que :*

$$A = 7x^2 - 5x^3 + 4x + 3$$

$$B = 5x^2 - 2 + 2x$$

5. *Dados los polinomios :*

$$M = 4x^5 + 3x^4 + 5x + 15$$

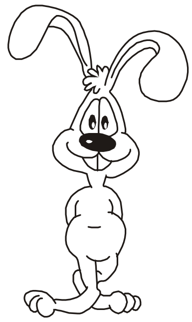
$$N = 7x^4 + 2x^3 - 4x + 6$$

$$P = 2x^5 - 9x^4 + x^3 + 1$$

Calcular : $M + N - P$

6. *Elimina los signos de agrupación y halla el resultado :*

a) $10x^4 - (6x^4 - 3x + 4) =$



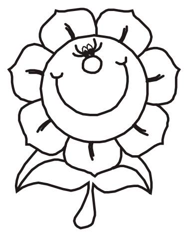
b) $5x^3 - (-2x - 3x^3) =$

c) $6x^2 - (4x - 2 - 4x^2) =$

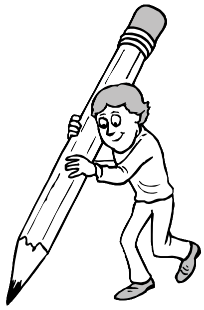
d) $(8a + 5b + 6c) + (8a - 4b - 6c)$

e) $4x^3 - (3x^3 - 2) + (2x^4 + 3) =$

f) $5x^4 - [-2x^4 + 4x^2 + 3x - (4x^4 + 2)] =$



g) $7x^2 + [6x^2 - (x^2 - 4x + 1)] =$



1. *Dados los polinomios :*

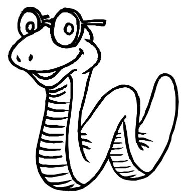
$M = 2x^5 + 4x^4 + 8x^2 + 9x + 10$

$N = 4x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 6x + 2$

$P = x^5 - 2x^2 - 8$

Hallar:

a) $M + N$ b) $M + P$ c) $M + N + P$ d) $M - P$



2. *Dados los polinomios :*

$M = 4x^4 + 3x^2 + 7x^3 + 9$

$N = 6x^2 + 8x + 10$

$P = -6x + 4x^3$

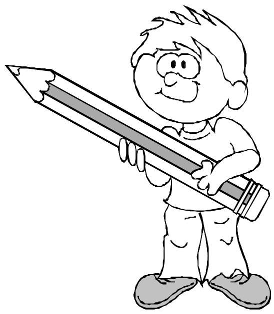
$Q = 2x^2 - 3x^4 + 1$

Hallar :

a) $M + N$ b) $N + P$ c) $N + Q$

d) $N - Q$ e) $M + N + P$ f) $M - P$

3. *Elimina los signos de agrupación y halla el resultado :*



a) $(3m + 8n + 4) - (6n + m - 2) =$

b) $(a - b + 2d) + (3b - d + a) =$

c) $(3x + 2y - z) + (2x - 2y + z) =$

d) $(8a + 5b + 6c) + (-8a + 4b - 6c) =$

e) $(2a + 3b) + (5c + 2) + (8a - 1) =$

f) $(a - b) + (b - c) + (c + d) =$

g) $(5ab + 3bc + 4cd) + (2bc + 2cd - 3de) =$

h) $(2x^2 + 4xy + y^2) + (6x^2 - 3xy + 2y^2) =$

i) $m^2 + 4mn - 2mn + n^2 =$

j) $x^3 + xy^2 + y^3 + 5x^2y + x^3 - y^3 =$

2. *MULTIPLICACIÓN DE MONOMIO POR POLINOMIOS*

Para efectuar esta multiplicación recordemos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición o sustracción.

$$\boxed{a\,(b \pm c) = ab \pm ac}$$

Si a, b y c son monomios tendremos entonces la multiplicación de un monomio por un polinomio.

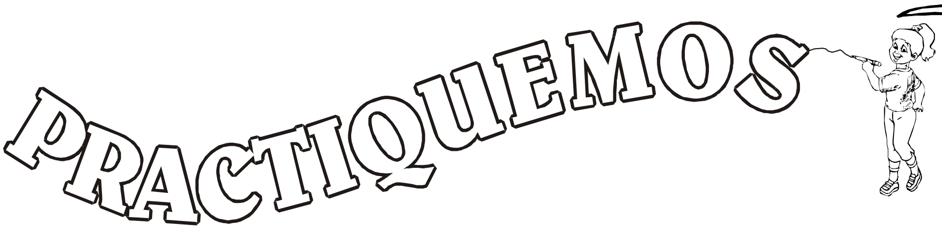
<u>Ejemplo</u>:

$$2x^3\,(3x + y^2 - 2) = 6x^4 + 2x^3y^2 - 4x^3$$

Ojo

Al multiplicar monomios se multiplica los coeficientes y luego las partes literales, considerando que :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$



Efectúa las multiplicaciones :

a) $5m\,(9m^4 + 3m^2 - 6x)$ = ______________________________

b) $m^5\,(8m^2 - 5m^4 + 3)$ = ______________________________

c) $a^2b\,(a^4 + 7a^2b^3 - 4a^5)$ = ______________________________

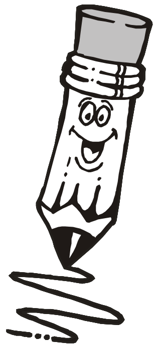
d) $4x^5\,(2xy + 7ab - 5)$ = ______________________________

e) $2x^3y^2\,(4xy^3 + 7x^5y - 4x^6)$ = ______________________________

f) $(8ab + 3a^3 - 4b^4)\,3a^2\,b^5$ = ______________________________

g) $(5mn + 7m^5 - 4 + 8m^6n^4)\,m^5n^3$ = ______________________________

h) $(x^3y^5 - 7x^6y^4z^5 + 10x^5)\,x^4$ = ____________________



i) $8a^2bc\,(15a^{13}b^6c^8 - 20a^{10}b^4)$ = ____________________

j) $a^2b\,(25a^7 - 12a^5b^4 + 7a^{15})$ = ____________________

Efectúa:

a) $a^6\,(8a^4 + 5b^5 + 7a^3)$ = ____________________

b) $8x^3\,(3x^6y^4 + 7x^5 - 13x^8y^9)$ = ____________________

c) $a^4b^5\,(15a^9b^7 - 12a^{25} + 7b^9)$ = ____________________

d) $12x^5\,(12a^2b + 4x^{10} - x^8y^{11})$ = ____________________

e) $(6a^4b^6 - 11a^9b^8 + 13b^7)\,4ab$ = ____________________

f) $(10xyz - 6x^5 - 16x^4y^5)\,8x^{13}y^5$ = ____________________

g) $(9 + 8abc - 13a^5b)\,b^8c^4$ = ____________________

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Se multiplican los coeficientes y las partes literales de cada monomio.

Ejem. : Multiplicar : $(2a^2)\ (3a^3)$

$$(2a^2) \quad (3a^3) = 2.3.a^2.a^3 = 6a^{2+3} = 6a^5$$

MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta, en cada caso, la regla de los signos y se separan los productos parciales con sus propios signos.

Ejem. : Multiplica :

$(3x^2 - 6x + 7)\ (4ax^2)$

$$(3x^2 - 6x + 7)\ (4ax^2) = 3x^2\ (4ax^2) - 6x\ (4ax^2) + 7\ (4ax^2)$$
$$= 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2$$

MULTIPLICACIÓN DE UN BINOMIO POR UN POLINOMIO

Se multiplican todos los términos del 1er. factor por cada uno de los términos del 2do. factor; y SE REDUCEN LOS TÉRMINOS SEMEJANTES.

Ejem. : Multiplica :

$(a^2 - 2a + a^3)\ (a^3 + 1)$

Existen 2 formas de desarrollar que son :

Primera Forma:

$(a^2 - 2a + a^3)\ (a^3 + 1) =$

$a^2\ (a^3) + a^2\ (1) - 2a\ (a^3) - 2a\ (1) + a^3\ (a^3) + a^3\ (1) =$

$a^5 + a^3 - 2a^4 - 2a + a^3 + a^3$

Ordenando :

$a^5 + a^2 - 2a^4 - 2a + a^6 + a^3$

Segunda Forma:

$(2a - 3b)\ (5b + 4b) =$

$2a - 3b$ por $5b + 4a$

Ordenando :

$$
\begin{array}{r}
2a - 3b \\
5b + 4a \\
\hline
8a^2 - 12\,ab \qquad\qquad \\
10\,ab - 15b^2 \\
\hline
8a^2 - 2\,ab - 15\,b^2
\end{array}
$$

PRACTIQUEMOS

Resuelve:

1. $4a + 3b$ por $2a - 3b$
2. $-5m - 4x$ por $-3x - 9m$
3. $8y - 2z$ por $-9z - 12y$
4. $-7m + 5m$ por $-8n - 9m$
5. $-6a + 9n$ por $-5n - 7a$

Multiplicar:

1. $(x^2 + xy + y^2)\ (x - y)$

2. $(a^2 + b^2 - 2ab)\ (a - b)$

3. $(a^2 + b^2 + 2ab)\ (a + b)$

4. $(x^3 - 3x^2 + 1)\ (x + 3)$

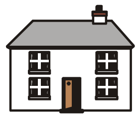
5. $(a^3 - a + a^2)\ (a - 1)$

6. $(m^4 + m^2n^2 + n^4)\ (m^2 - n^2)$

7. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\ (2x + 3)$

8. $(3y^3 + 5 - 6y)\ (y^2 + 2)$

TRABAJEMOS EN CASA



1. $(m^3 - m^2 + m)\ (am + a)$

2. $(3a^2 - 5ab + 2b^2)\ (4a - 5b)$

3. $(5m^4 - 3m^2n^2 + n^4)\ (3m - n)$

4. $(a^2 + a + 1)\ (a + 1)$

5. $(x^3 + 2x^2 - x)\ (x^2 - 2x)$

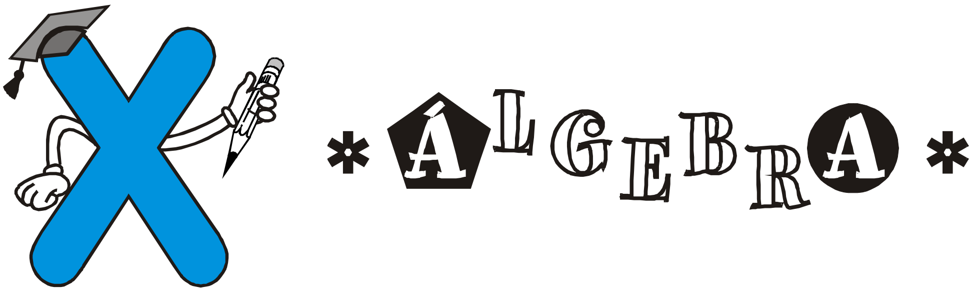
6. $(x^2 + 1 + x)\ (x^2 + x)$

7. $(m^3 - 4m + m^2)\ (m^3 + 1)$

8. $(n^2 - 2n + 1)\ (n^2 - 1)$

9. $(2y^3 + y - 3y^2)\,(2y + 5)$

10. $(3x^3 - a^3 + 2ax^2)\,(2a^2 - x^2)$



CONTENIDO

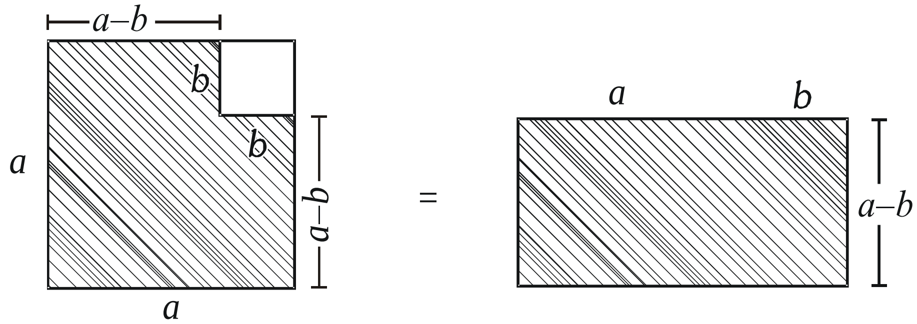
- División de monomios
- División de un polinomio entre un monomio
- Productos notables
  - ☑ Cuadrado de un binomio
  - ☑ Cubo de un binomio

RESEÑA HISTÓRICA DE LEIBNIZ

Gottfried Wihelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz está considerado uno de los mayores intelectuales del siglo XVII. No en vano, su actividad abarcó ciencias y disciplinas tan dispares como las matemáticas (enumeró los principios fundamentales del cálculo infinitesimal), la filosofía (desarrollando el concepto de mónadas), la teología, el derecho, la política y la filología, entre otras muchas.

Sabias que!! Las áreas de las figuras geométricas nos permiten "demostrar" identidades algebraicas. Ejemplo:



$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

- Para dividir monomios, procedemos a dividir los coeficientes y aplicamos la teoría de exponentes (división de bases iguales) para la parte literal.

  Ejemplo:

$$\frac{39m^8y^3z^4}{3m^5yz^2} = 13m^3y^2z^2$$

PRACTIQUEMOS

▶ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $42m^8n^{10} \div 3m^5n^4$ ________________ b) $62m^8n^{15} \div 31mn^9$ ________________

c) $342m^4n^5z^4 \div 6mn^4z^3$ ________________ d) $49a^7b^{13} \div 7a^2b^3$ ________________

e) $93x^9y^{12} \div 31x^4y^7$ ________________ f) $12a^9y^{11} \div 6a^3y^9$ ________________

g) $27x^{11}y^3z^4 \div 9x^2y^2z^3$ ________________ h) $45a^8b^7 \div 9a^6b^2$ ________________

i) $44a^{12}b^8 \div 4a^4b$ ________________ j) $66a^6y^6z^2 \div 2a^3y^2z$ ________________

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO

El procedimiento para dividir un polinomio entre un monomio es el mismo que realizamos en la división entre monomios sólo que ahora el monomio dividirá a cada término del polinomio.

Ejemplo a):

$$\left(16x^7y^3 - 14x^9y^8\right) \div \left(2x^4y^2\right) = 8x^3y - 7x^5y^6$$

Ejemplo b)

$$\frac{30x^5y^9 + 10x^4y^7 - 4x^{10}y^{15}}{2x^3y^5} = \frac{30x^5y^9}{2x^3y^5} + \frac{10x^4y^7}{2x^3y^5} - \frac{4x^{10}y^{15}}{2x^3y^5}$$

$$= \boxed{15x^2y^4 + 5x^1y^2 - 2x^7y^{10}}$$

$$\frac{16x^4 + 24x^5 - 32x^3}{-8x^3} = \frac{16x^4}{-8x^3} + \frac{24x^5}{-8x^3} - \frac{32x^3}{-8x^3}$$

$$= -2x - 3x^2 + 4x^0$$

$$= \boxed{-2x - 3x^2 + 4}$$

Ley de signos:

Nota: $(-)(-) = (+)$
$(+)(+) = (+)$
$(-)(+) = (-)$
$(+)(-) = (-)$

PRACTIQUEMOS

▶ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\left(36m^5n^3+48m^9n^{13}\right)\div\left(12mn^2\right)$ = ______________

b) $\left(25a^6b^5c^2+70a^4b^8c^{10}-10a^{15}b^{10}c^7\right)\div\left(5a^3b^5c\right)$ = ______________

c) $\left(49x^8y^5-7x^{13}y^{12}\right)\div\left(7x^3y^2\right)$ = ______________

d) $\left(100m^{12}n^6+150m^{20}n^8\right)\div\left(25m^4n^3\right)$ = ______________

e) $\left(45a^{12}b^{38}-30a^{20}b^7+50a^{20}b^{16}\right)\div\left(25a^4b^3\right)$ = ______________

f) $\left(x^{34}y^{12}+x^{36}y^{26}-3x^{20}y^{15}\right)\div\left(x^{12}y^7\right)$ = ______________

g) $\left(27a^4b^9+90a^5b^{12}\right)\div\left(3ab\right)$ = ______________

h) $\left(120a^{95}b^{30}+40a^{45}b^{15}c^3\right)\div\left(5a^{25}b^3\right)$ = ______________

TRABAJEMOS EN CASA

▶ Efectúa las siguientes divisiones:

a) $36m^5y^7z^4\div 6m^2y$ = ______________

b) $142a^7b^{10}c^8\div 2a^6b^9c$ = ______________

c) $432x^{10}y^{14}z^5\div 3x^5y^8$ = ______________

d) $\left(62a^8b^3c^4+42a^7b^6c^2-12a^4b^6c\right)\div\left(2a^2b^2c\right)$ = ______________

e) $\left(44a^7b^{10}c^2-88a^{11}b^7+55a^9b^4\right)\div\left(11a^3b^3\right)$ = ______________

f) $\left(36a^8y^{11}x^2-84a^5y^3\right)\div\left(12a^3y^2\right)$ = ______________

g) $\left(45x^5y^8z+95x^7y^7\right)\div\left(5x^4y^3\right)$ = ______________

PRACTIQUEMOS

Dividir :

1. $\dfrac{a^2 - ab}{a}$

2. $\dfrac{9x^2y^3 - 6a^2y^4}{-3x^2}$

3. $\dfrac{3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3}{-a}$

4. $\dfrac{4x^8 - 10x^6 - 6x^4}{2x^3}$

5. $\dfrac{20a^{10}b^{15} - 18a^{16}b^{10} + 14a^8b^{12}}{2a^4b^8}$

6. $\dfrac{16x^6y^{12} - 20x^{10}y^{18} + 32x^8y^{20}}{-4x^4y^{10}}$

7. $\dfrac{5x^6y^4 - 10x^5y^{12} + 5x^{10}y^{13}}{5x^4y^3}$

8. $\dfrac{24x^{12}y^{18} - 18x^{10}y^{16} + 10x^{12}y^{17}}{2x^7y^{12}}$

9. $\dfrac{30x^5y^9+15x^{10}y^8-5x^3y^4}{5x^3y^4}$

10. $\dfrac{4x^6y^7-2x^3y^{10}+8x^5y^4}{2x^2y}$

PRODUCTOS NOTABLES

- Son aquellos productos que al presentar cierta forma particular, evita que se efectúe la operación de multiplicación escribiendo directamente el resultado.

I. Cuadrado de un Binomio

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}}$$

Ejemplos:

1. $(x+5)^2=(x)^2+2(x)(5)+(5)^2$
   $=x^2+10x+25$

2. $(y-3)^2=\left(y^2\right)-2(y)(3)+(3)^2$
   $=y^2-6y+9$

3. $\left(z^3+2\right)^2=\left(z^3\right)^2+2\left(z^3\right)(2)+(2)^2$
   $=z^6+4z^3+4$

4. $\left(2x^2+3\right)^2=\left(2x^2\right)^2+2\left(2x^2\right)(3)+(3)^2$
   $=4x^4+12x^2+9$

5. $(3x-8y)^2=(3x)^2-2(3x)(8y)+(8y)^2$
   $=9x^2-48xy+64y^2$

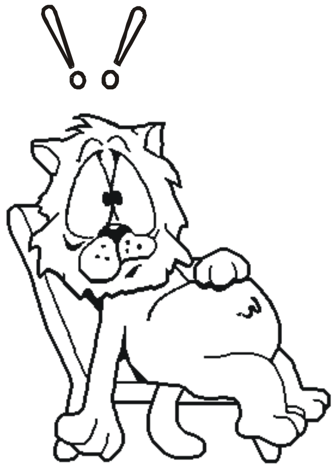
6. $(3x^4 - 5y^3)^2 = (3x^4)^2 - 2(3x^4)(5y^3) + (5y^3)^2$
$= 9x^8 - 30x^4y^3 + 25y^6$

PRACTIQUEMOS

▶ Efectuar:

1. $(x+4)^2 =$

2. $(x-7)^2 =$



3. $(m^3 - 8)^2 =$

4. $(x^8 + 9)^2 =$

5. $(2x + 8y)^2 =$

6. $(3a^4 + 6)^2 =$

7. $(10m^3 - 8y^5)^2 =$

8. $(2a^4 - 3b^2)^2 =$

9. $(a^{10} + 10b^{12})^2 =$

10. $(3x^2 + 8b^3)^2 =$

▶ Resolver:

1. $(x+y)^2$ **2.** $(x+3)^2$ **3.** $(x^4+y^5)^2$ **4.** $(x+6)^2$

5. $(m^4+2y)^2$ **6.** $(6a+b)^2$ **7.** $(7x+1)^2$ **8.** $(m-n)^2$

9. $(2a+3b)^2$ **10.** $(a-3)^2$

II. Cubo de un Binomio

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}}$$

Ejemplos:

1. $(y+2)^3=(y)^3+3(y)^2(2)+3(y)(2)^2+(2)^3$

$= y^3+6y^2+12y+8$

2. $(y-3)^2=(y)^3-3(y)^2(3)+3(y)(3)^2-(3)^3$

$= y^3-9y^2+27y-27$

3. $(2x+5)^3=(2x)^3+3(2x)^2(5)+3(2x)(5)^2+(5)^3$

$= 8x^3+60x^2+150x+125$

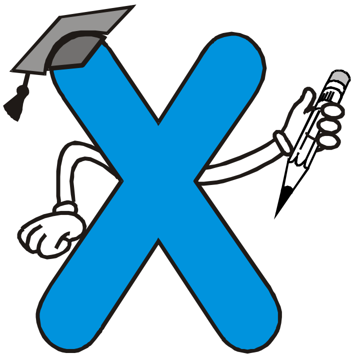
PRACTIQUEMOS

- Efectuar:

1. $(a-2)^3$ =
2. $(a+4)^3$ =
3. $(4x+5)^3$ =
4. $(a-2)^3$ =
5. $(m+3)^3$ =
6. $(a-4)^3$ =
7. $(2x+1)^3$ =
8. $(b-4)^3$ =
9. $(x^6-1)^3$ =
10. $(4x+1)^3$ =

- Resolver:

1. $(a+2b)^3$
2. $(x-1)^3$
3. $(a^2+8)^3$
4. $(x-5)^3$
5. $(1+m)^3$
6. $(4a-1)^3$
7. $(2a-b)^3$
8. $(x-4)^3$
9. $(a-6)^3$
10. $(4x-y)^3$



* ÁLGEBRA *

CONTENIDO

- Factorización
  - ☑ Factor común monomio
  - ☑ Factor común polinomio
  - ☑ Diferencia de cuadrados

RESEÑA HISTÓRICA DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci

El matemático italiano Leonardo Fibonacci dirigió sus estudios hacia el álgebra y la teoría de números, principalmente. El conocimiento matemático de clásicos grecorromanos, árabes e indios constituyó la base fundamental de sus trabajos.

FACTORIZACIÓN

El fin primordial de la factorización es transformar un polinomio en una multiplicación de dos o más factores:

I. FACTOR COMÚN MONOMIO :

Es el monomio que está contenido en todos los términos del polinomio, está formado por el M.C.D de los coeficientes y las variables comunes elevadas a su menor exponente.

Ejemplos:

Factorizar :

1. $8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2w$

Solución : **a)** Hallamos el M.C.D de 8, 6 y 10

$$\begin{array}{ccccc|c} 8 & - & 6 & - & 10 & 2 \\ 4 & - & 3 & - & 5 & \end{array}$$

M.C.D = 2

b) El menor exponente con el que aparecen las variables comunes x e son 1,1 respectivamente. Por lo tanto el FACTOR COMÚN es : $2xy$

$$8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2w = \underline{2xy}(\underline{4x} + \underline{3x^2z} - \underline{5yw})$$

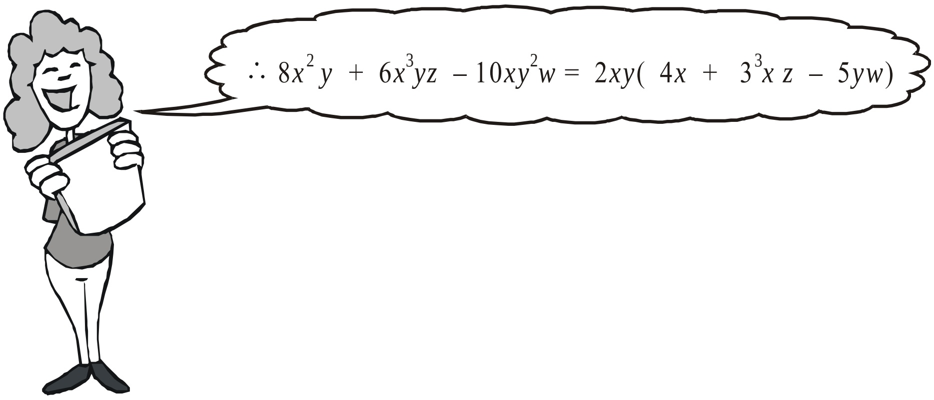
FACTOR COMÚN

c) El factor común divide a cada término del polinomio

* Dividimos $8x^2y \div 2xy = 4x$

* Dividimos $6x^3yz \div 2xy = 3x^2z$

* Dividimos $10xy^2w \div 2xy = 5yw$



2. $4a^8y^5 - 6a^3y^7$

Solución: **a)** Hallamos el M.C.D. de 4 y 6.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & - & 6 & 2 \\ 2 & - & 3 & \end{array}$$

MCD = 2

b) El menor exponente de las variables comunes *a* e *y* son 3 y 5 respectivamente por lo tanto el FACTOR COMÚN es: $2a^3y^5$

$$4a^8y^5 - 6a^3y^7 = 2a^3y^5\left(2a^5 - 3y^2\right)$$

* Dividimos $4a^8y^5 \div 2a^3y^5 = 2a^5$

* Dividimos $6a^3y^7 \div 2a^3y^5 = 3y^2$

$$\therefore 4a^8y^5 - 6a^3y^7 = 2a^3y^5\left(2a^5 - 3y^2\right)$$

PRACTIQUEMOS

Factoriza:

1) $2x^3y^2 + 6xy^3 - 4xy^2 =$

2) $12m^4n^5 - 4m^2n^6$ =

3) $a^3 - a^3 + a^5 =$

4) $5x^6y^7 - 20x^4y^6 =$

5) $2x^2y + 4x^3y^2 =$

6) $6d^2 + 4d^3 =$

7) $7x^4y^6 - 14x^2y =$

8) $4ab^2 + 10ab^3 =$

9) $x^2 - x^6 + x^3 =$

10) $5a^2b^3c - 15abc^2 =$

TRABAJEMOS EN CASA

1) $6m^2 + 3m^4$

2) $12ab^3 - 7a^2b^3x$

3) $4a^2b + 2ab^3$

4) $15x + 3x^2$

5) $x^{20} - x^{16} + x^{12}$

6) $12x^2y + 6xy$

7) $4a^3 - 8a^2$

8) $7m^3 - 49m^2$

9) $6x^2 + 18x^3$

10) $a^2b + a^2c + ac^3$

II. FACTOR COMÚN POLINOMIO

Consiste en factorizar el factor en común, es decir, aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplos :

Factoriza :

1.

$$3a(x-2y)+5b^2(x-2y)=(x-2y)(3a+5b^2)$$

$$\text{FACTOR COMÚN : }(x-2y)$$

$$*\ \text{Dividimos } 3a(x-2y)\div(x-2y)=3a$$

$$*\ \text{Dividimos } 5b^2(x-2y)\div(x-2y)=5b^2$$

$$\therefore 3a(x-2y)+5b^2(x-2y)=(x-2y)(3a+5b^2)$$

2. $ab^3(2x+3y)+2x+3y$

$$\text{FACTOR COMÚN : }(2x+3y)$$

$$ab\,(2^3x+3y)+(2x+3y)=(2x+3y)(ab^3+1)$$

$$*\ \text{Dividimos } ab^3(2x+3y)\div(2x+3y)=a^3b$$

$$*\ \text{Dividimos } (2x+3y)\div(2x+3y)=1$$

PRACTIQUEMOS

Factoriza :

1. $3a\,(x-2)-2b\,(x-2)=$

2. $b(x-y)+(x-y)=$

3. $b\,(n+1)-c(n+1)-(n+1)=$

4. $a^2+1-b(a^2+1)=$

5. $4y(m-b)+m-b=$

6. $x(a+2)-y(a+2)+3(a+2)=$

7. $x(a+1) + a + 1 =$

8. $5a(m - n) + m - n =$

9. $2x\ (a - 1) - 3y(a - 1) =$

10. $a^2(x - y + 1) + b^2\ (x - y + 1) =$

TRABAJEMOS EN CASA

1. $x(m + n) + y(m + n)$
2. $a(x + 2) + b(x + 2)$
3. $2m(a - 1) - n(a - 1)$
4. $4x(b^2 + x - 1) + 3y(x - 1 + b^2)$
5. $n(x + 1) - 4(x + 1)$
6. $(m + 1) - x(m + 1)$
7. $1 - m + 2x(1 - m)$
8. $x^3(m - n + 1) + y^2(m - n + 1)$
9. $a(x - y) + (x - y)b$
10. $2x(a-b) - 3y(a - b)$

III. DIFERENCIA DE CUADRADOS

La diferencia de cuadrados es igual a la multiplicación de la suma de los términos por la diferencia de los mismos.

$$\boxed{\underset{\downarrow}{a^2} - \underset{\downarrow}{b^2} = (a+b)(a-b)}$$

$$\sqrt{a^{\cancel{2}}} \quad \sqrt{b^{\cancel{2}}}$$

$$a \qquad b$$

Ejemplos:

Factoriza:

1)

$$\underset{\downarrow}{x^2} - \underset{\downarrow}{49} = (x+7)(x-7)$$

$$\sqrt{x^2}\sqrt{49}$$

$$x \qquad 7$$

2)

$$\underset{\downarrow}{25x^2} - \underset{\downarrow}{y^4} = (5x+y^2)(5x-y^2)$$

$$\sqrt{25x^2}\sqrt{y^4}$$

$$5x \qquad y^2$$

PRACTIQUEMOS

Factoriza :

1. $x^2 - 25 =$

2. $100 - a^2b^8 =$

3. $1 - \frac{x^2}{25} =$

4. $36a^4 - 25b^{16} =$

5. $1 - c^2 =$

¡Que fácil!

6. $16a^2 - 16 =$

7. $\frac{1}{4} - 4a^2 =$

8. $x^2y^8 - z^4 =$

9. $x^4 - y^8 =$

10. $36 - 25m^4 =$

TRABAJEMOS EN CASA

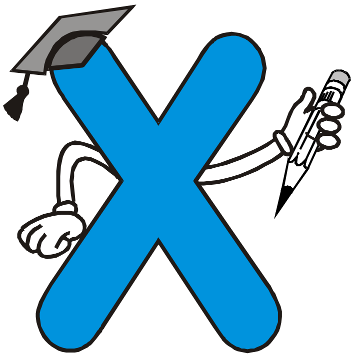
Factoriza :

1. $x^2 - 16$ **2.** $m^2 - n^2$ **3.** $a^2 - 1$

4. $a^2 - 9$ **5.** $9 - x^2$ **6.** $1 - 4c^2$

7. $1 - 9x^2y^4$ **8.** $49x^2 - 36y^6$ **9.** $m^4 - n^6$

10. $25 - a^4$



ÁLGEBRA

CONTENIDO

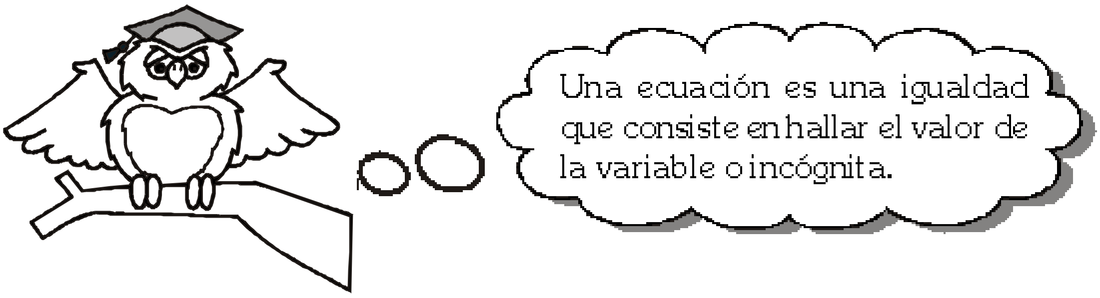
- Ecuaciones de 1er grado
  - ☑ Términos
  - ☑ Método de solución
  - ☑ Ejercicios

RESEÑA HISTÓRICA DE PAOLO RUFFINI

Paolo Ruffini (1765 – 1822)

Físico y matemático italiano. Nació en Valentano, entonces perteneciente a los Estados Pontificios, estudió en la Universidad de Módena, donde fue profesor de matemáticas y, en 1814, rector. Ruffini fue el primero que realizó un intento, con éxito parcial (probablemente en 1803 o 1805), de demostrar la imposibilidad de resolver mediante procesos elementales de álgebra las ecuaciones generales de un grado superior a cuatro. Esta formulación, denominada teorema de Abel – Ruffini, fue demostrada definitivamente por el matemático noruego Niels Henrik Abel. Ruffini murió en 1822 en Módena.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO



Términos:

Variable o incógnita

$$\underbrace{x+56}_{\substack{\text{1er.}\\ \text{miembro}}} = \underbrace{96}_{\substack{\text{2do.}\\ \text{miembro}}}$$

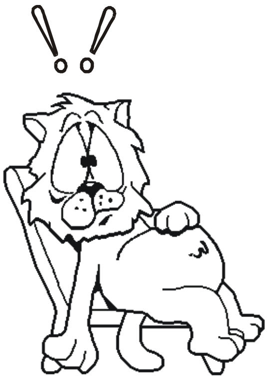
Para resolver una ecuación se utilizará el método de "TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS".

Ejemplos:

1)

$$33x-12 = 13x+8$$
$$33x-13x = 8+12$$
$$20x = 20$$
$$x = \frac{20}{20}$$
$$x = 1$$

$$\frac{5x-4}{3} = x+2$$
$$5x-4 = 3(x+2)$$
$$5x-4 = 3x+6$$
$$5x-3x = 6+4$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$



3)

$$5(x-1) = 2(x+5)$$
$$5x-5 = 2x+10$$
$$5x-2x = 10+5$$
$$3x = 15$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

PRACTIQUEMOS

1) $x + 79 = 83$

2) $x - 43 = 82$

3) $7x + 2 = 93$

4) $5x - 4 = 41$

5) $16x - 42 = 9x + 7$

6) $32x + 39 = x + 132$

7) $\dfrac{12x - 7}{5} = x + 7$

8) $\dfrac{14x - 8}{10} = x + 4$

9) $8x - 2 = 5(x + 2)$

10) $8x - 4 = 2(x + 10)$

11) $5(x - 3) = 4(x + 10)$

12) $6(x + 7) = 5(x + 15)$

13) $\dfrac{x - 4}{3} = \dfrac{x + 2}{5}$

14) $\dfrac{2x + 1}{5} = \dfrac{x + 5}{7}$

TRABAJEMOS EN CASA

I. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{3x+1}{2}=11$

2. $10x-8=20+3x$

3. $6x=48-2x$

4. $\dfrac{6x-9}{9}=3$

5. $7x-10=45-4x$

6. $2x+6=10$

7. $\dfrac{4x-2}{2}=13$

8. $7x-2=5x+20$

9. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{x+6}{3}$

10. $5(x+3)=4(x+5)$

CONTENIDO

- Inecuaciones de primer grado
  - ☑ Términos
  - ☑ Método de solución
  - ☑ Ejercicios

RESEÑA HISTÓRICA DE RENÉ DESCARTES

René Descartes

Considerado el primer filósofo moderno, René Descartes utilizó la ciencia y las matemáticas para explicar y pronosticar acontecimientos en el mundo físico. Su famosa frase "Cogito, ergo sum" ("Pienso, luego existo") fue el punto de partida que le llevó a investigar las bases del conocimiento. Descartes desarrolló el sistema de coordenadas cartesianas para ecuaciones gráficas y figuras geométricas. Los mapas modernos utilizan todavía un sistema de cuadrícula que puede ser trazado a las técnicas gráficas cartesianas.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

También es conocida con el nombre de desigualdad.
El procedimiento para resolver las inecuaciones es el mismo que se realiza en las ecuaciones, sólo que ahora se obtendrá el conjunto solución (C.S.)

Los símbolos de desigualdad que usaremos son:

Ejemplo 1

$$2x - 5 > 11$$
$$2x > 11 + 5$$
$$2x > 16$$
$$x > \frac{16}{2}$$
$$x > 8$$

$$C.S. = \{9;\ 10;\ 11;\ldots\}$$

Ejemplo 2

$$4x - 3 \leq 17$$
$$4x \leq 17 + 3$$
$$4x \leq 20$$
$$x \leq \frac{20}{4}$$
$$x \leq 5$$

$$\text{C.S.} = \{5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0\}$$

Ejemplo3

$$\frac{2x}{5} - 1 < 7$$
$$\frac{2x}{5} < 7 + 1$$
$$\frac{2x}{5} < 8$$
$$2x < 8{,}5$$
$$2x < 40$$
$$x < \frac{40}{2}$$
$$x < 20$$

$$\text{C.S.} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots 19\}$$

PRACTIQUEMOS

1. $x+4<15$

2. $x+7\geq 8$

3. $m+9<19$

4. $x-52\geq 4$

5. $7x-4\geq 30-10x$

6. $10x-8>7+9x$

7. $13x-2>6x+5$

8. $\frac{x-8}{5}\leq 9$

9. $\frac{x-8}{2}<41$

10. $7x+6<41$

11. $\frac{3x}{7}-3\leq 6$

12. $\frac{5x}{2}-10\geq 5$

TRABAJEMOS EN CASA

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $2x - 9 > 47$

2. $8x < 70 + 2$

3. $\dfrac{x+7}{2} \leq 8$

4. $\dfrac{2x+1}{5} \geq 3$

5. $4x + 21 \geq 421$

6. $3x + 9 < 2x + 15$

7. $8x + 4 > 68$

8. $\dfrac{3x}{2} + 1 < 13$

9. $\dfrac{2x}{5} - 2 \leq 10$

10. $7x \leq 5x + 8$