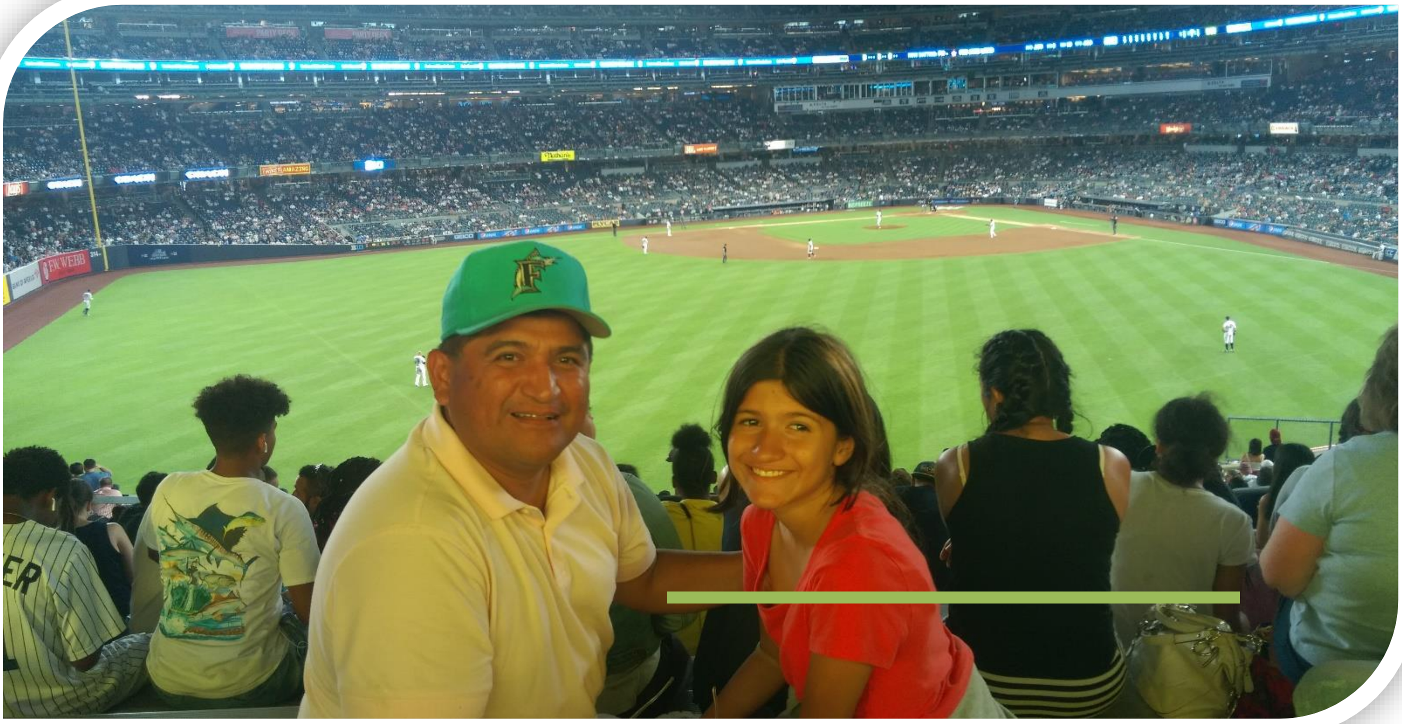


GEOMETRÍA

Triángulos

Colmado.com.do
wilsoncachay.com

Profesor: Wilson Cachay
Móvil 809 787 0013
info@wilsoncachay.com

GEOMETRÍA

CONTENIDO

- Triángulos
  - ☑ Definición
  - ☑ Elementos
  - ☑ Clasificación
    - 3 Según la longitud de sus lados
    - 3 Según la medida de sus ángulos
  - ☑ Teoremas fundamentales
    - 3 Suma de ángulos internos
    - 3 ángulo exterior
  - ☑ Ejercicios

RESEÑA HISTÓRICA DE PITÁGORAS

Pitágoras

Pitágoras (582 a.C. 500a.C.), filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón, nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. se dice que Pitágoras había sido condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a. C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo. La filosofía de Pitágoras se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos.

Pitágoras considerado el primer matemático, Pitágoras fundó un movimiento en el sur de la actual Italia, en el siglo VI a. C., que enfatizó el estudio de las matemáticas con el fin de intentar comprender todas las relaciones del mundo natural. Sus seguidores, llamados pitagóricos, fueron los primeros en formular la teoría que decía que la Tierra es una esfera que gira en torno al sol.

TRIÁNGULOS

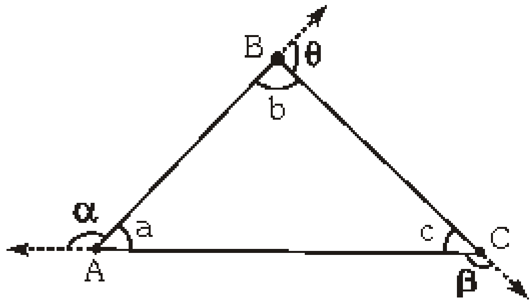
I. Definición

- Es aquella figura formada por la unión de tres puntos no colineales mediante segmentos.
- Son los polígonos que tienen 3 lados.

II. <u>ELEMENTOS</u>

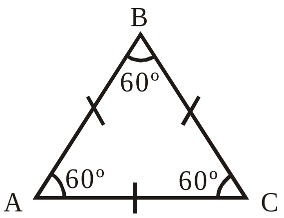
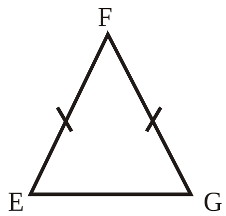
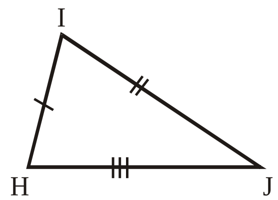
Sus elementos son :

* *Lados* → $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$
* *Vértices* → *A, B,* y *C*
* *Ángulos Interiores* → ***a, b, c***
* *Ángulos Exteriores* → αβ y θ

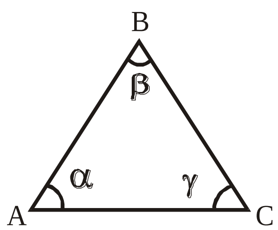
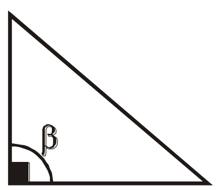
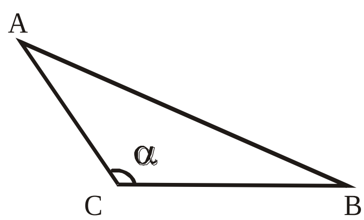


III. CLASIFICACIÓN

1. Según la longitud de sus lados:

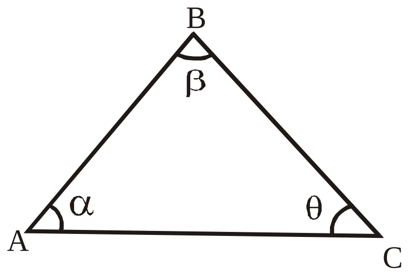
a) <u>**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**</u>	b) <u>**TRIÁNGULO ISÓSCELES**</u>	c) <u>**TRIÁNGULO ESCALENO**</u>
Si sus tres lados son de IGUAL LONGITUD	Si dos lados tienen IGUAL LONGITUD	Si ningún lado tiene IGUAL LONGITUD
		
AB= BC= AC	EF= FG	HI ≠ IJ ≠ JH

2. Según la medida de sus ángulos:

a) <u>**TRIÁNGULO ACUTÁNGULO**</u>	b) <u>**TRIÁNGULO RECTÁNGULO**</u>	c) <u>**TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO**</u>
Si sus tres ángulos son AGUDOS	Si uno de sus ángulos es RECTO	Si uno de sus ángulos es OBTUSO
		
α, β, r < 90º	β = 90º	α > 90º

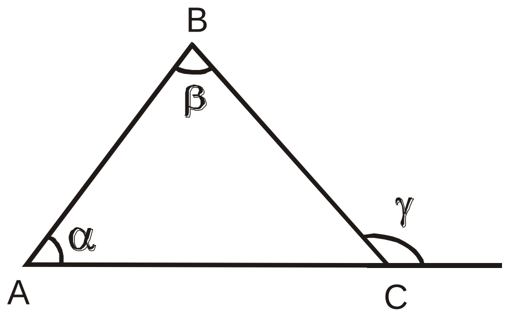
IV. TEOREMAS FUNDAMENTALES

1. **Suma de los ángulos interiores** : "La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°"



$$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180^\circ}$$

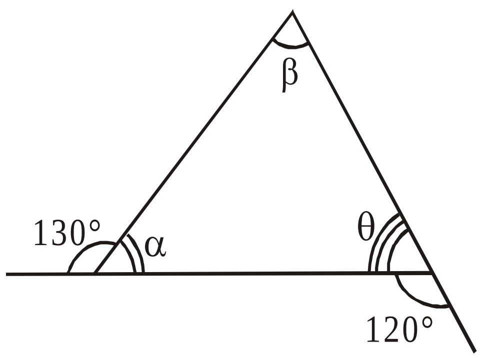
2. **Ángulo Exterior** : "En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes al ángulo exterior".



$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$$

EJEMPLOS :

1. En la figura, calcular ""



Solución :

$\alpha = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\theta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

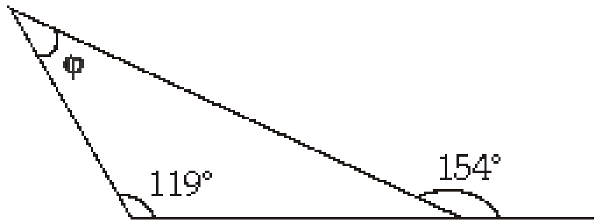
$\beta + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\beta + 110 = 180^\circ$

$\beta = 180^\circ - 110^\circ$

$$\boxed{\beta = 70^\circ}$$

2. Calcular en :

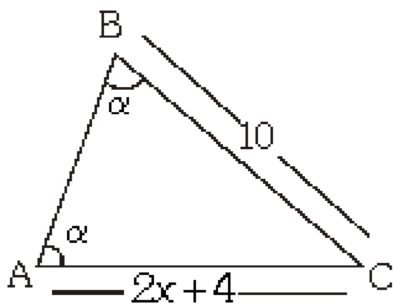


Solución :

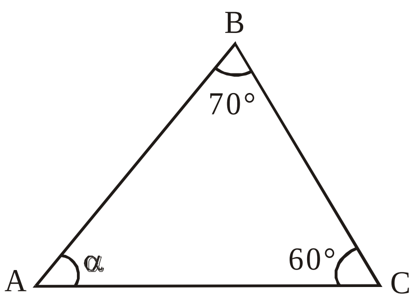
$$\varphi + 119° = 154°$$
$$\varphi = 154° - 119°$$
$$\boxed{\varphi = 35°}$$

PRACTIQUEMOS

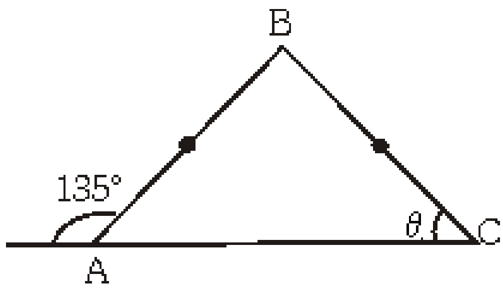
1. En la figura, calcular x



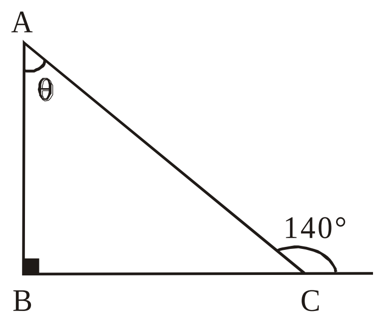
2. En la figura, calcular



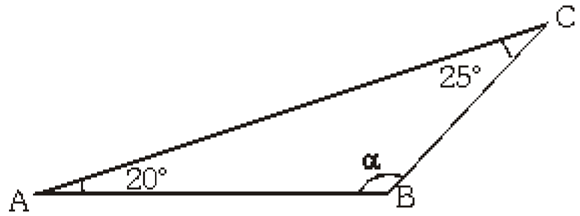
3. En la figura, calcular θ.



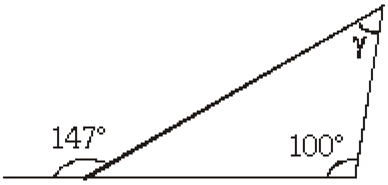
4. En la figura, calcular



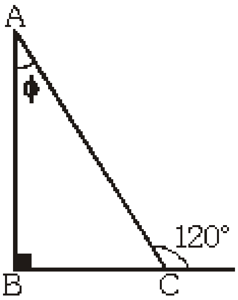
5. En la figura, calcular α.



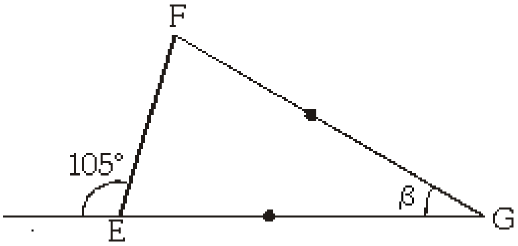
6. Calcular γ.



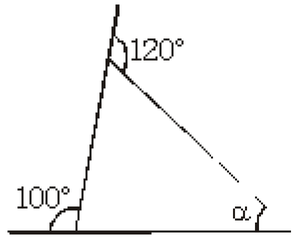
7. En la figura, calcular ϕ.



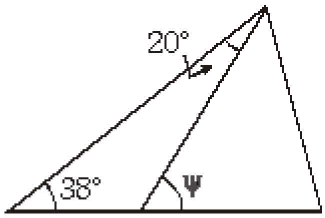
8. En la figura, calcular β.



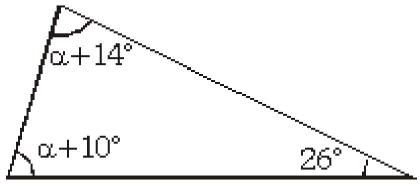
9. En la figura, calcular α.



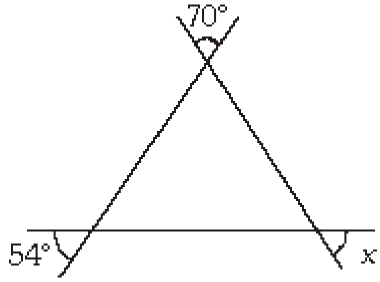
10. De la figura, calcular ψ.

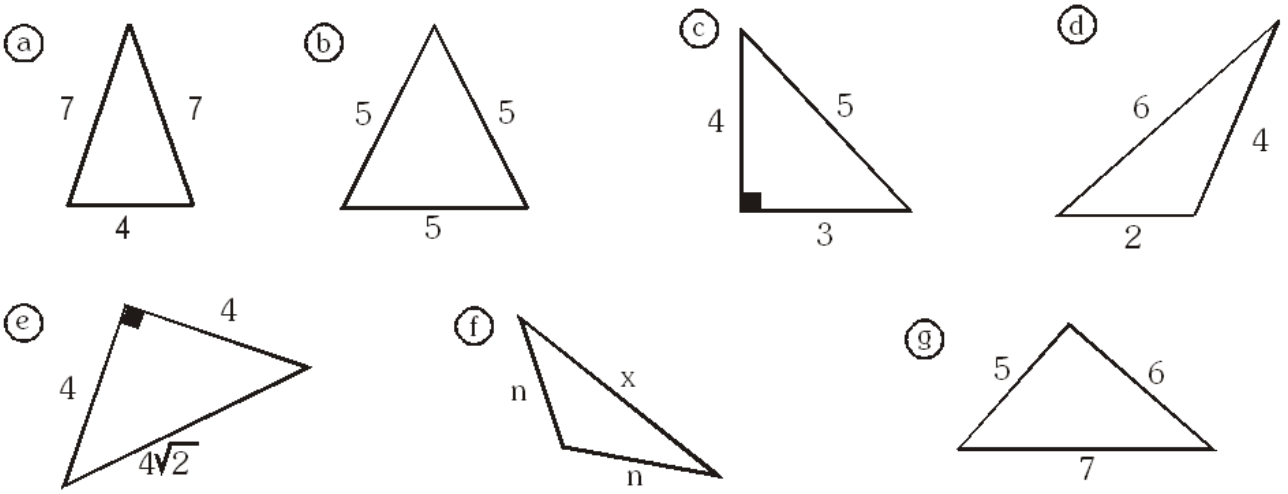


11. Calcular, α en:



12. Calcular x en:

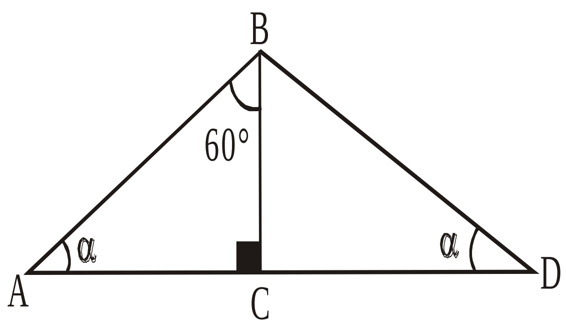




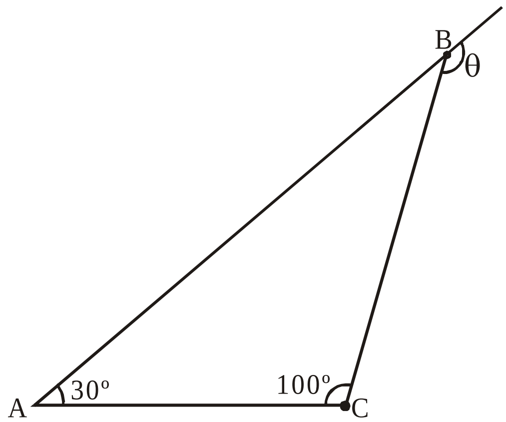
TRIÁNGULO	a	b	c	d	e	f	g
EQUILÁTERO							
ISÓSCELES							
ESCALENO							
RECTÁNGULO							
ACUTÁNGULO							
OBTUSÁNGULO							

TRABAJEMOS EN CASA

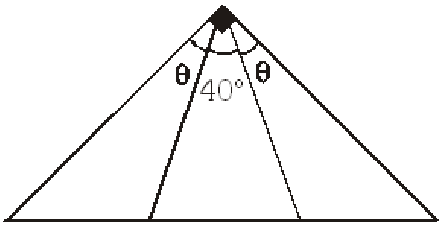
1. Calcular α



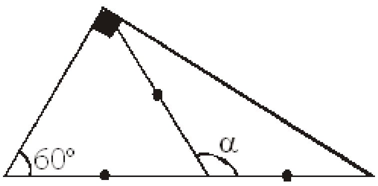
2. De la figura, calcular Θ



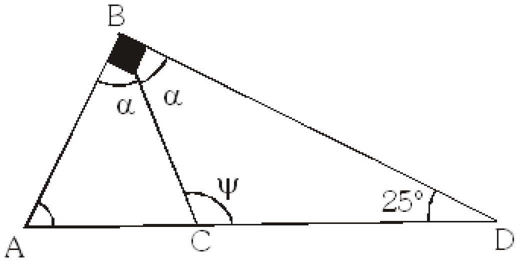
3. De la figura, calcular θ.



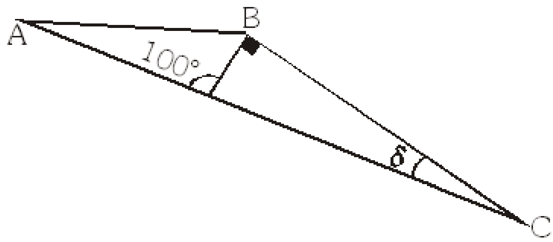
4. Calcular α.

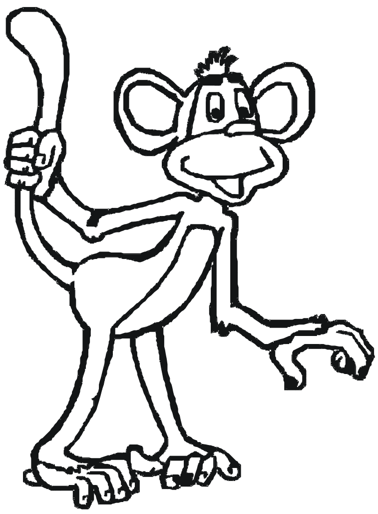


5. Calcular ψ.



6. Del gráfico, calcular δ.





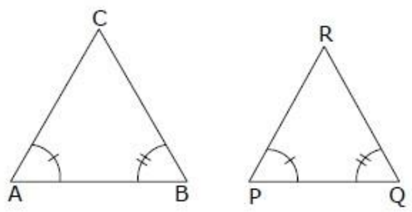
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN: Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

TEOREMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

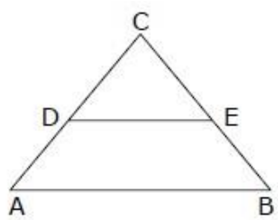
TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL) (A-A): Dos triángulos serán semejantes, cuando dos ángulos de uno de ellos sean, respectivamente, congruentes a dos ángulos del otro.

Si $\measuredangle A \cong \measuredangle P$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle Q$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



COROLARIO 1: Toda paralela a un lado de un triángulo, determina un triángulo semejante al primero.

Si $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$, entonces $\Delta CDE \sim \Delta CAB$

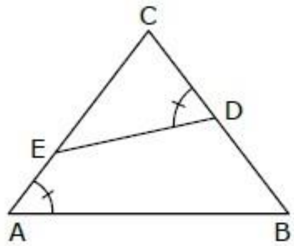


COROLARIO 2: Al trazar en el interior de un triángulo ABC un segmento ED, no paralelo al lado de AB, de tal forma que ∡ EDC ≅ ∡ BAC, entonces el △EDC es semejante con el △ABC.

Si ∢ EDC ≅ ∢ CAB,

Entonces

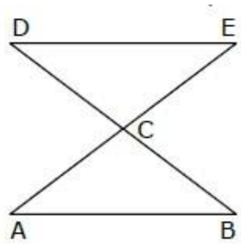
□CDE □ □CAB



CORORARIO 3

Si se prolongan dos lados de un triángulo y se traza una paralela al otro lado, se determina un nuevo triángulo semejante al primero.

Si $\overline{DE} \;//\; \overline{AB}$, entonces $\Delta CDE \sim \Delta CBA$



TEOREMA 2

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **un ángulo congruente comprendido entre lados proporcionales**.

O sea, en la figura 1:

Si $\measuredangle A \cong \measuredangle P$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

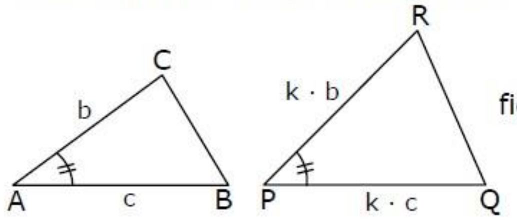


fig. 1

TEOREMA 3

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan sus **lados proporcionales**.

O sea, en la figura 2:

Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{RP}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

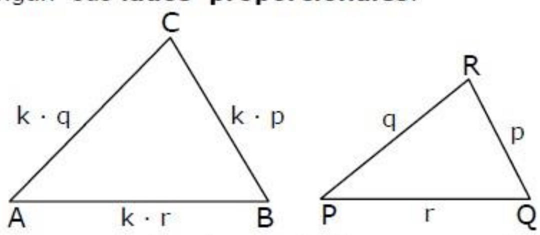


fig. 2

TEOREMA 4

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que **tengan dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes**.

O sea, en la figura 3:

Si $\measuredangle C \cong \measuredangle R$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

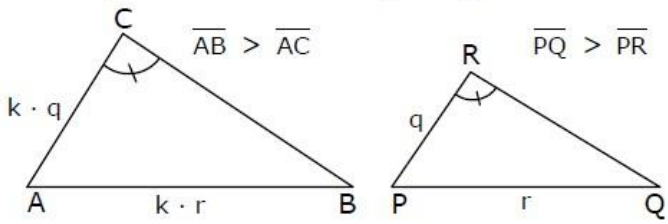
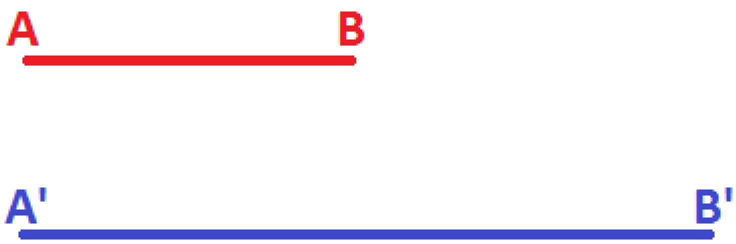


fig. 3

<u>**Qué es la razón de dos segmentos**</u>

Para entender el **teorema de Tales** es necesario que entiendas muy bien qué es la razón entre dos segmentos.

Por ejemplo, tenemos estos dos segmentos:



Como ya sabes, los segmentos están delimitados por dos extremos y se nombran por los extremos que lo limitan. Al segmento rojo, que empieza en el extremo A y termina en el extremo B, se le llama segmento AB.

Si dos segmentos tienen alguna relación entre ellos, se utilizan las mismas letras para nombrarlos, pero como no pueden repetirse, se utiliza la comilla simple al lado de cada letra y esa comilla se lee «prima». Por tanto A', se leería «A prima».

Así pues, al segmento azul, que empieza en A' y termina en B', lo llamaremos segmento A'B'.

La razón (o relación) de dos segmentos es el resultado de dividir la longitud de esos dos segmentos.

Si el segmento AB mide 5 cm y el segmento A'B' mide 10 cm, ¿cuál es la razón de estos dos segmentos?

Sólo tenemos que dividir la longitud del segmento AB entre la longitud del segmento A'B':

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

La razón de esos dos segmentos es 0,5, que significa que AB es la mitad que A'B'.

También podemos calcular la razón dividiendo la longitud del segmento A'B' entre la longitud del segmento AB:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{10}{5} = 2$$

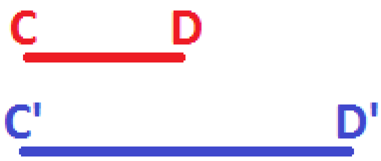
En este caso, la razón es 2, o con otras palabras, el segmento A'B' es el doble que el segmento AB.

Si te das cuenta, decir que el segmento AB es la mitad que el segmento A'B', es lo mismo que decir que el segmento A'B' es el doble que el segmento AB.

Por tanto, para calcular la razón no es necesario hacerlo de ambas formas. Calculándola por una de las dos formas es suficiente.

Proporcionalidad entre pares de segmentos

Tenemos ahora estos dos segmentos:



El segmento rojo, CD, mide 3 cm y el segmento azul C'D' mide 6 cm.

Vamos a calcular su razón:

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

La razón de los segmentos CD y C'D' es la misma que la razón de los segmentos AB y A'B'.

Cuando dos pares de segmentos tienen la misma razón, se dice que son proporcionales.

Por tanto los segmentos AB y A'B' son proporcionales a CD y C'D':

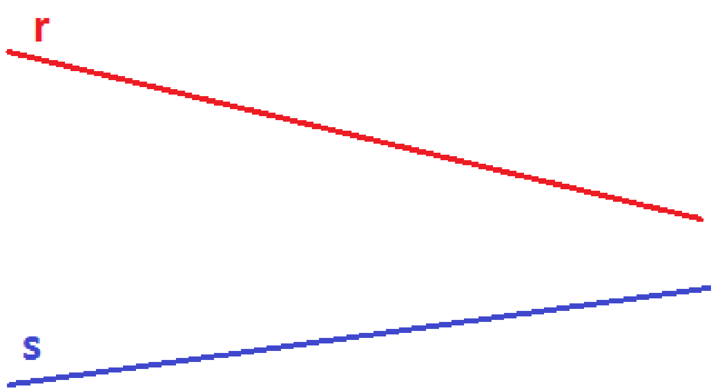
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = 0,5$$

Dos pares de segmentos son proporcionales cuando su razón es la misma

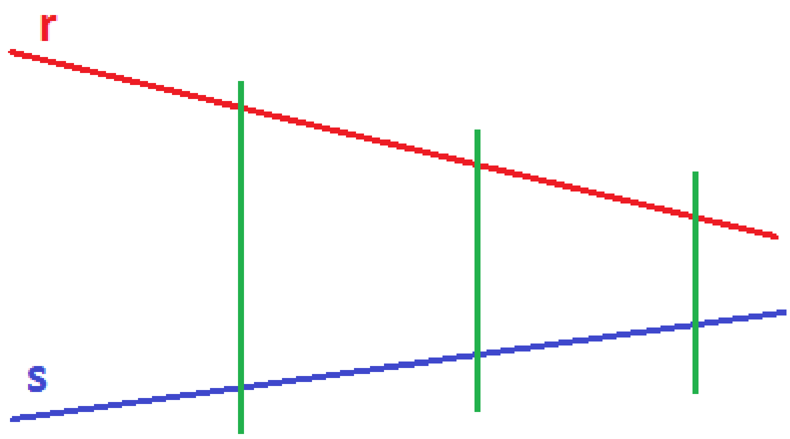
<u>El teorema de Tales</u>

Una vez que te he explicado la razón entre dos segmentos y la proporcionalidad entre dos pares de segmentos, vamos a ver el teorema de Tales.

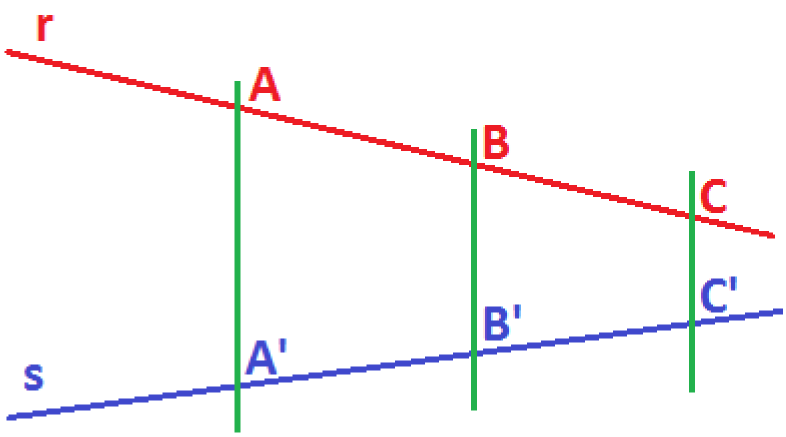
Tenemos dos rectas secantes (que no son paralelas). A una la llamaremos la recta r (color rojo) y a la otra la llamaremos la recta s (color azul):



A estas dos rectas, las cortamos con varias rectas paralelas (color verde), de la siguiente manera:



A los puntos donde cortan las rectas paralelas a la recta r, los voy a llamar A, B y C y a los puntos donde cortan las rectas paralelas a la recta s, los llamaré A', B' y C':



Las rectas verdes, han dividido a la recta r en dos segmentos: el segmento AB y el segmento BC. Además tenemos un tercer segmento si consideramos la primera y la última recta paralela, es decir, el segmento AC.

También han dividido a la recta s en dos segmentos A'B' y B'C' y si consideramos la primera y la última recta paralela, existe un tercer segmento A'C'.

El **teorema de Tales** nos dice lo siguiente:

Cuando dos rectas cualesquiera, r y s, son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos que forman la recta r son proporcionales a los segmentos que forman la recta s.

¿Y eso que quiere decir?

Pues que si divides las longitudes de los segmentos que están enfrentados, es decir, el segmento AB entre el segmento A'B' tienen la misma razón que si divides el segmento BC entre el segmento B'C':

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Como tienen la misma razón, AB y A'B' son proporcionales a BC y B'C'.

Si consideramos el segmento formado por la primera y la última recta paralela, es decir, el segmento AC, también es proporcional al segmento

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

AB:

Y por tanto, todos los segmentos de la recta r son proporcionales a los segmentos de la recta s:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

¿Para qué sirve el teorema de Tales?

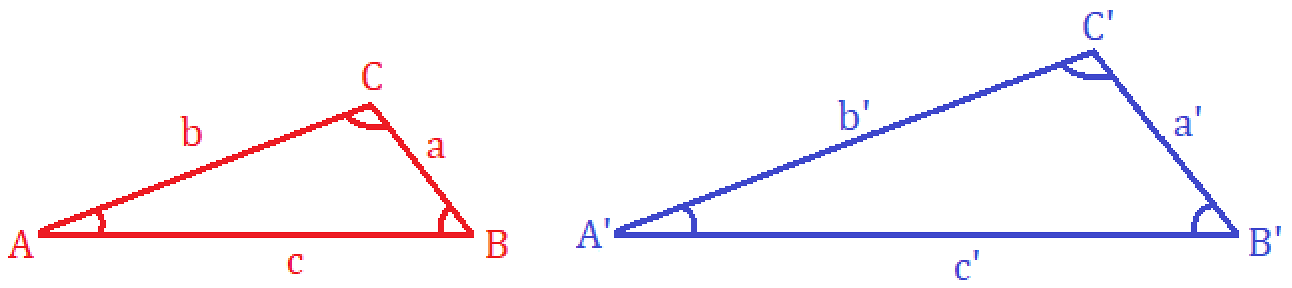
El teorema de Tales te permite calcular la longitud de un segmento, conocidos los valores de todos los demás segmentos de dos rectas que se encuentran en posición de Tales.

Encontrarse en posición de Tales significa que las rectas tienen que estar tal y como dice el teorema de Tales, es decir, dos rectas secantes cortadas por varias rectas paralelas.

Triángulos en posición de Thales

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales.

Por ejemplo, los siguientes triángulos son semejantes:



ya que sus ángulos son iguales:

$$\hat{A} = \widehat{A'}$$

$$\hat{B} = \widehat{B'}$$

$$\hat{C} = \widehat{C'}$$

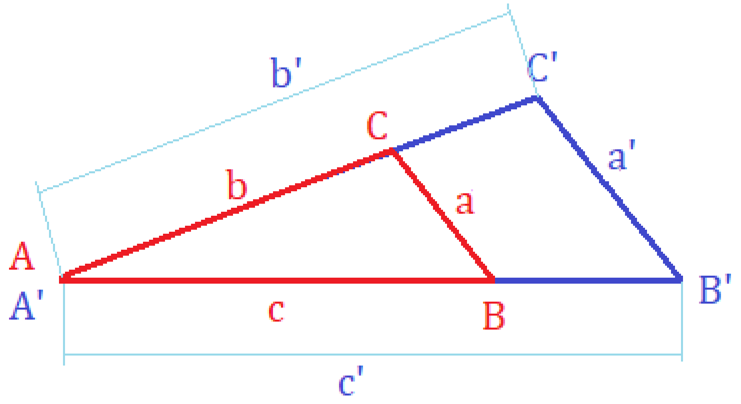
y sus lados son proporcionales, es decir, tienen la misma razón:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Esta razón se calcula dividiendo un lado de un triángulo entre el mismo lado del mismo triángulo.

Dos triángulos están en **posición de Thales** cuando tienen un vértice en común y los lados opuestos a ese vértice son paralelos.

Por ejemplo, si unimos por un vértice los dos triángulos anteriores, se quedan en posición de Thales:



Donde vemos que A y A' es un vértice común y los lados a y a' son paralelos entre sí.

Cuando dos triángulos están en posición de Thales, **son semejantes** entre ellos y por tanto, sus lados son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Como dividir un segmento en partes iguales con el teorema de Tales

Vamos a ver **cómo dividir un segmento cualquiera en partes iguales** aplicando el teorema de Tales.

Ejemplo de división de un segmento en partes iguales con el teorema de Tales

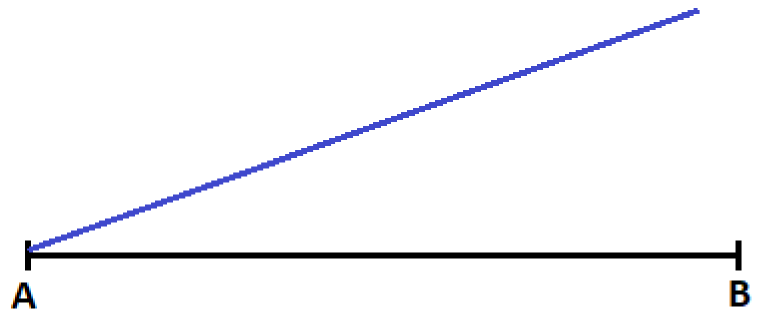
Podemos utilizar el teorema de Tales para dividir un segmento cualquiera en partes iguales, independientemente de la longitud del segmento.

¿Cómo utilizamos el teorema de Tales para dividir un segmento cualquiera?

Vamos a verlo paso a paso.

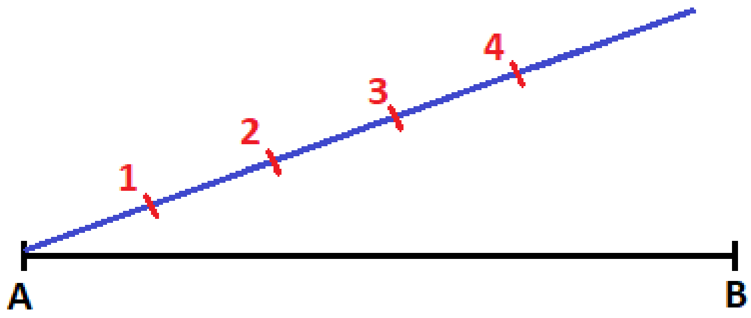
Tenemos un segmento cualquiera:

Podemos dibujar una **semirrecta**, que tenga una dirección cualquiera, a partir de uno de los extremos del segmento.

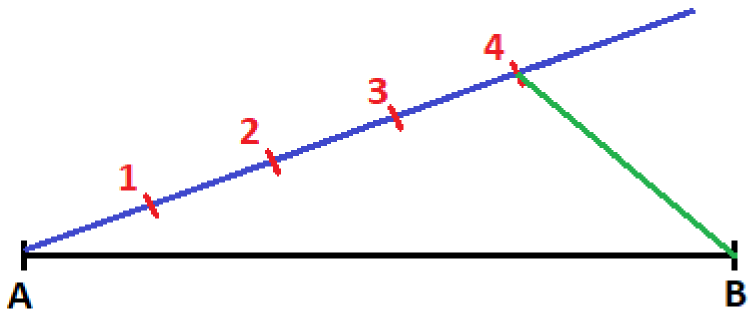


Esa semirrecta la vamos colocando una medida cualquiera, de una longitud que conocemos, de por ejemplo de 1 cm, de 2 cm o de lo que queramos, ayudándonos de una regla. El número de veces que vamos añadiendo la medida conocida sobre la semirrecta tiene que coincidir con el número de partes en la que se quiera dividir el segmento.

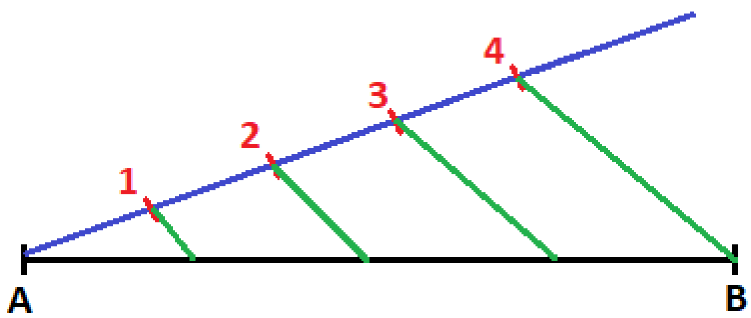
Por ejemplo, voy a dividir la semirrecta en 4 partes de 1 cm cada una. La voy añadiendo una a continuación de la otra:



La última división, la unimos con el extremo B del segmento:



Finalmente, trazamos líneas paralelas a la recta 4-B, que pasen por las divisiones de la semirrecta 3, 2 y 1 y que corten al segmento AB:



El segmento AB queda dividido por tanto en 4 partes iguales y cada una de esas partes son proporcionales a las partes de la semirrecta. Ahí es donde se cumple el teorema de Tales y el cual lo hemos aprovechado para hacer esto.

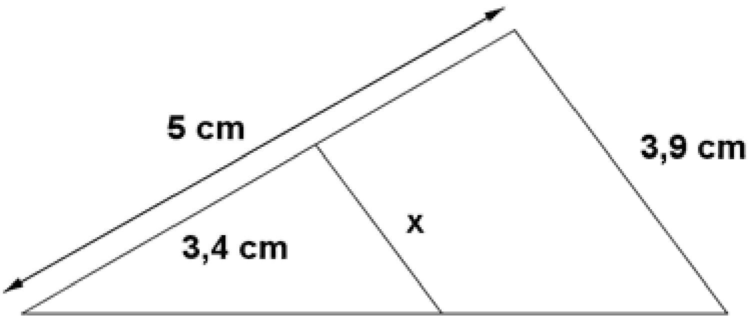
Como ves, no necesitamos conocer la longitud del segmento AB para dividirlo. Por tanto, el **teorema de Tales** es muy útil para **dividir segmentos cuya longitud no conocemos** o que **no podemos dividir**

directamente, ya que la división entre la longitud total del segmento y el número de partes no es exacta.

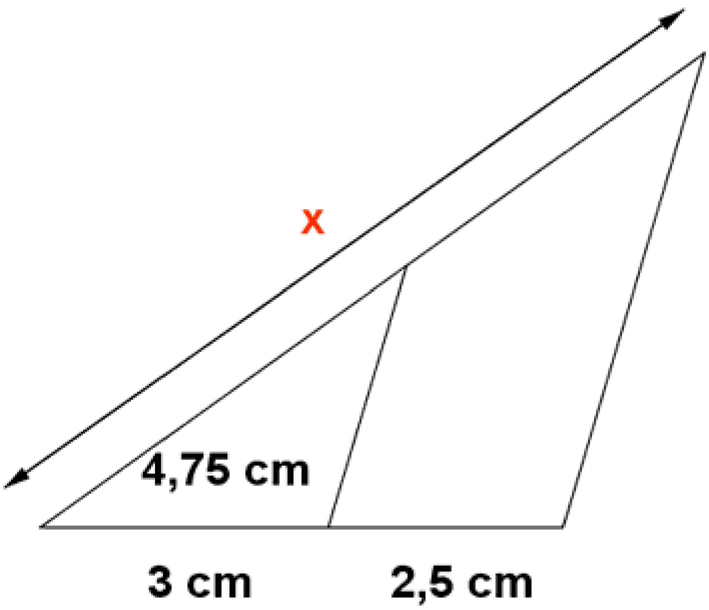
Podemos dividir el segmento AB en el número de partes que queramos, tan solo añadiendo más medidas a la semirrecta. Por otro lado, la semirrecta puede partir desde el punto A o desde el punto B del segmento indiferentemente y puede tener cualquier dirección, es decir, podría ser incluso perpendicular al segmento.

Desarrolla los siguientes ejercicios aplicando el teorema de Tales

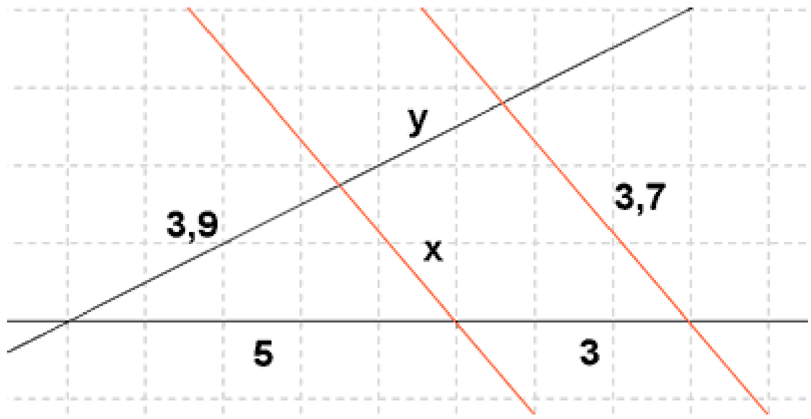
1) Usa el teorema de Tales para calcular x



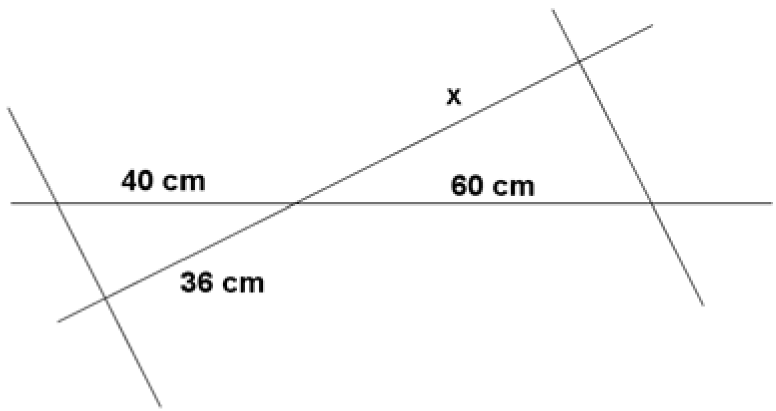
2) Calcula el valor de x aplicando el teorema de Tales



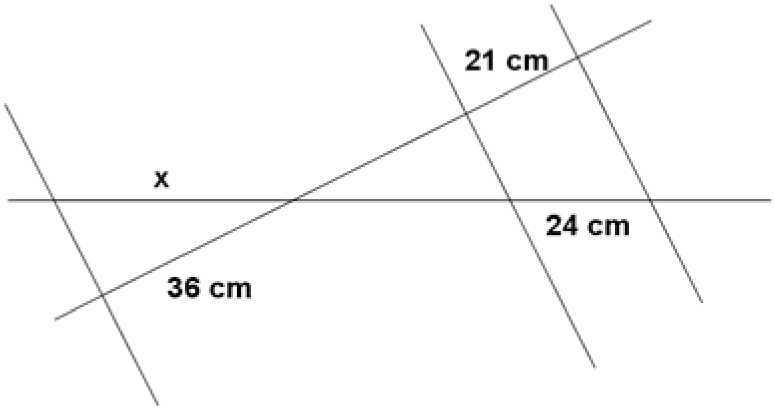
3) Halla x e y aplicando el teorema de Tales



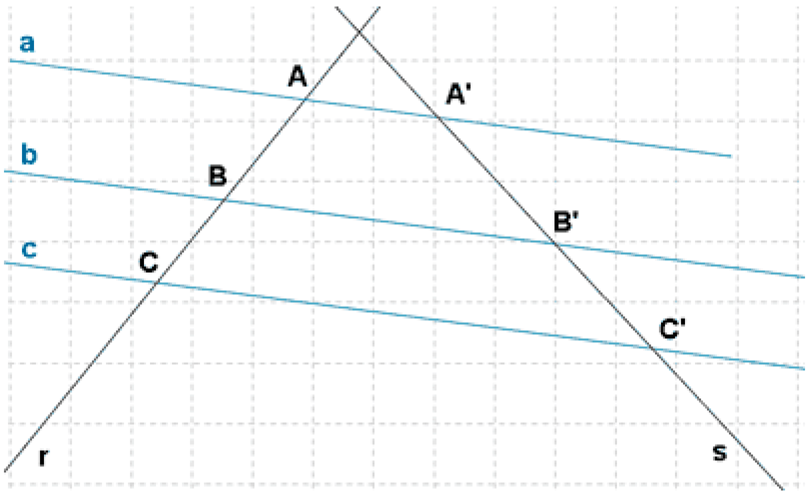
4) Halla x aplicando el teorema de Tales



5) Halla x aplicando el teorema de Tales

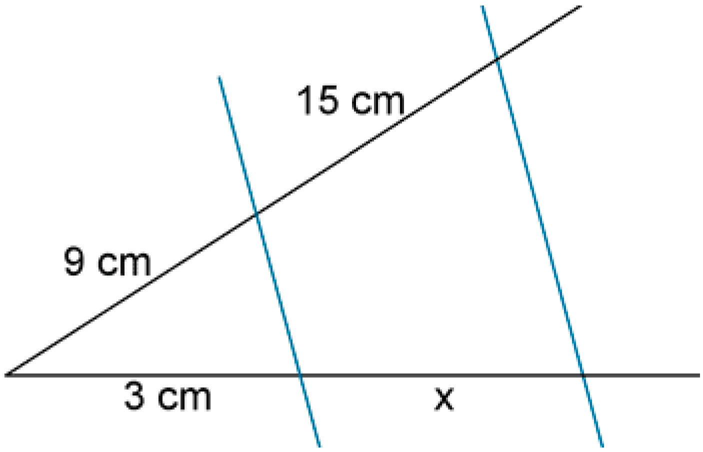


6) Sabiendo que AB = 15 cm, BC = 20 cm y A'B' = 12 cm, halla la longitud del segmento B'C'. ¿Qué teorema has aplicado?

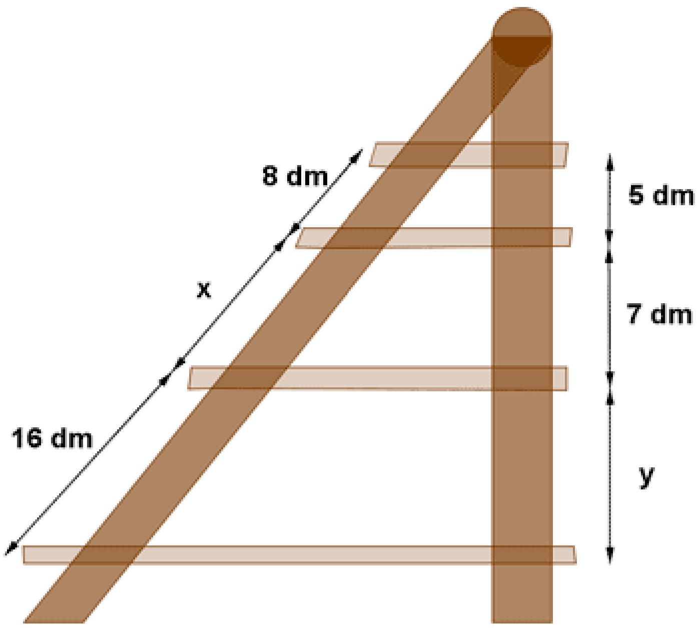


7) Divide al segmento AB de 10 cm en siete partes iguales.

8) *Calcula la longitud del segmento x de la figura.*

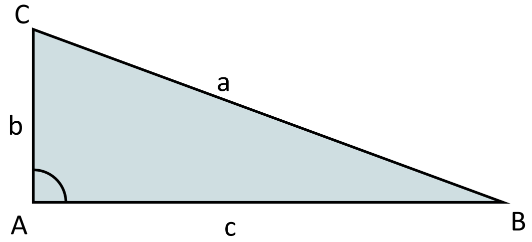


9) *Las baldas de una repisa representada en la figura son paralelos. Calcula las longitudes de la repisa representadas como x e y.*



TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



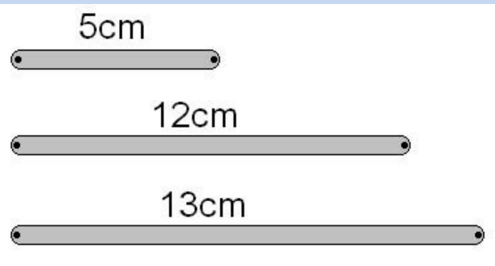
$$a^2 = b^2 + c^2$$

De esta fórmula se obtienen las siguientes:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

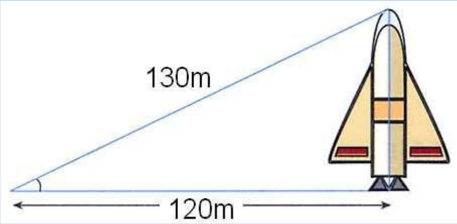
$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

1. Comprobación del teorema de Pitágoras.



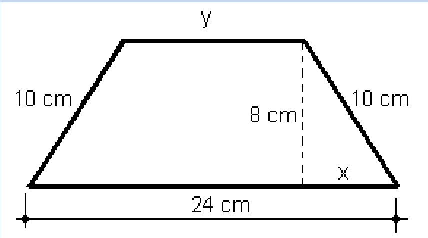
- Conocer el teorema de Pitágoras y saber sobre qué tipo de triángulos se puede aplicar.
- Determinar si una terna de medidas construye o no un triángulo rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

2. Cálculo de un lado en un triángulo rectángulo.



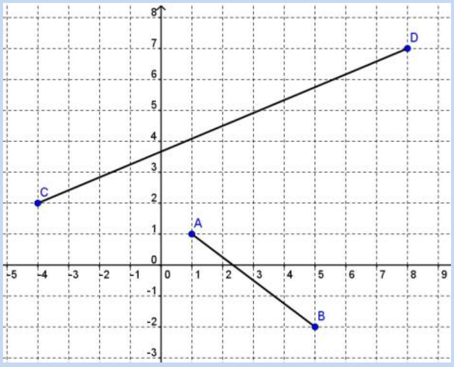
- Saber utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el cateto o la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que conocemos dos de sus lados.

3. Cálculo de longitudes en una figura plana.



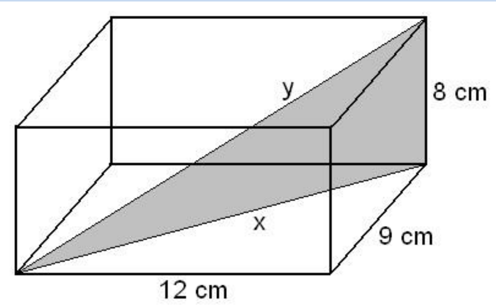
- Saber determinar triángulos rectángulos en distintas figuras del plano para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas, asociadas a las figuras.

4. Cálculo de longitudes y distancias en el plano.



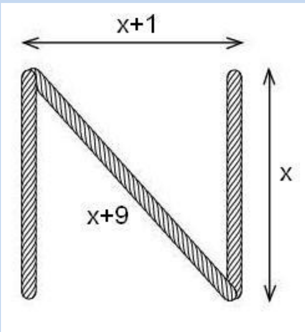
- Saber utilizar las acotaciones de los ejes cartesianos para conocer directamente medidas horizontales y verticales que permitan calcular la medida de segmentos oblicuos.

5. Cálculo de longitudes en un cuerpo.



- Saber determinar triángulos rectángulos en distintos cuerpos del espacio para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas asociadas a esos cuerpos.

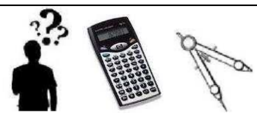
6. Ecuaciones asociadas al teorema de Pitágoras.



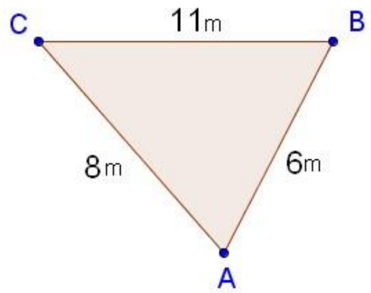
- Saber plantear y resolver ecuaciones asociadas a un triángulo rectángulo, aplicando adecuadamente el teorema de pitágoras.

1. Comprobación del teorema de Pitágoras.

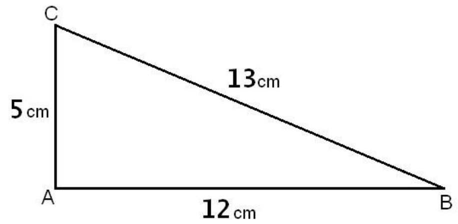
Ejercicio 1. Calcula el cuadrado de los tres lados de estos triángulos y comprueba en cuál de ellos de cumple el teorema de Pitágoras.



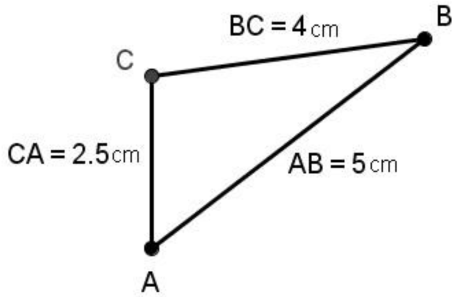
1)



2)

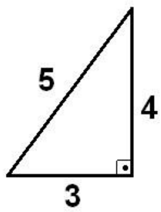


3)

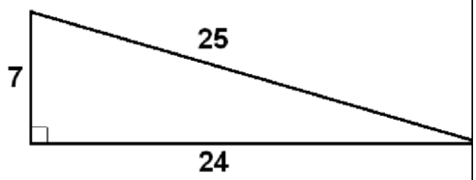


Ejercicio 2. Calcula el cuadrado de los tres lados de estos triángulos rectángulos y comprueba en cada caso que se cumple el Teorema de Pitágoras.

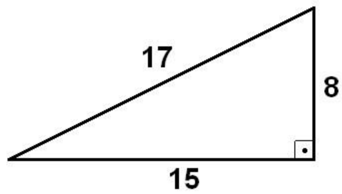
1)

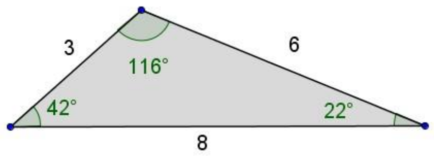
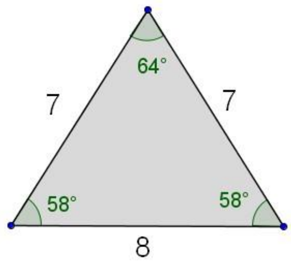
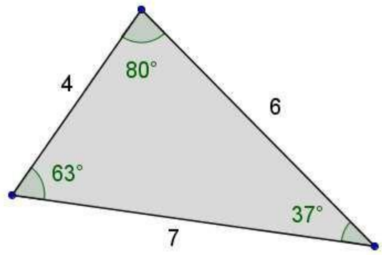


2)



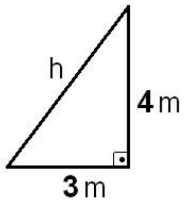
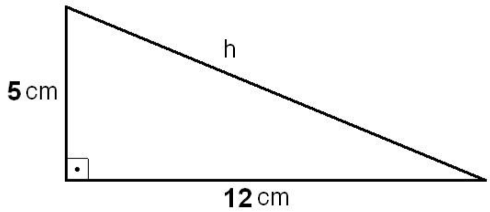
3)

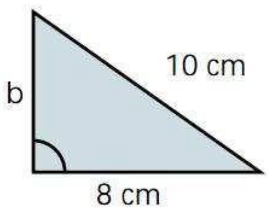
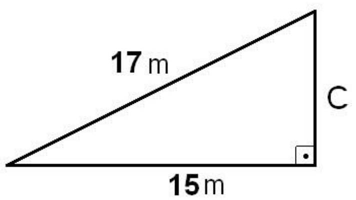


Ejercicio 3. Calcula el cuadrado de los tres lados de estos triángulos y comprueba que ninguno de ellos cumple el Teorema de Pitágoras.		
1) 	**2)** 	**3)** 

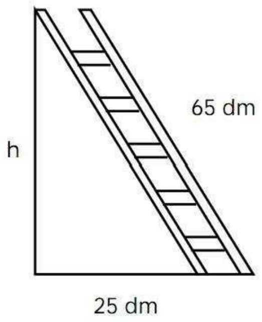
Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, se facilita la medida de los tres lados de un triángulo. Determina cuáles de ellos son rectángulos, obtusángulos o acutángulos.		
1) 12cm, 16cm y 20cm	**2)** 13m, 12m y 10m	**3)** 5cm, 10cm y 6cm
4) 8mm, 5mm y 5mm	**5)** 11m, 61m y 60m	**6)** 40cm, 41cm y 9cm

2. Cálculo de un lado en un triángulo rectángulo.

Ejercicio 5. Halla la medida, en metros, de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 metros.  Solución: h=5m	**Ejercicio 6.** Halla la medida, en centímetros, de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 5 y 12 centímetros.  Solución: h= 13cm

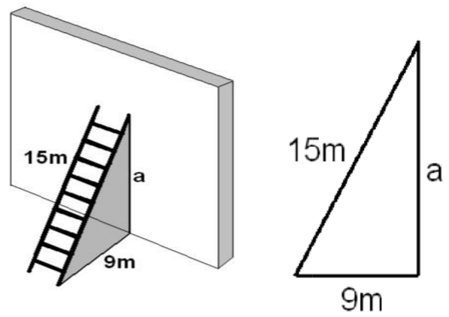
Ejercicio 7. Halla la medida, en centímetros, del cateto desconocido de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 10 cm y el cateto conocido mide 8 cm.  Solución: b=6cm	**Ejercicio 8.** Halla la medida, en metros, del cateto desconocido de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 17 metros y el cateto conocido mide 15 metros.  Solución: c=8m

Ejercicio 9. Una escalera de 65 decímetros se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 25 decímetros de la pared. ¿Qué altura, en decímetros alcanza la escalera?



Solución: h=60dm

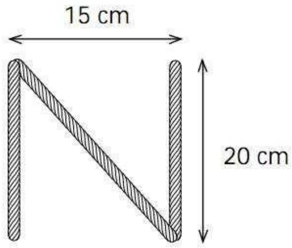
Ejercicio 10. Una escalera de 15 metros se apoya en una pared vertical, de modo que el pie de la escalera se encuentra a 9 metros de esa pared. Calcula la altura, en metros, que alcanza la escalera sobre la pared.



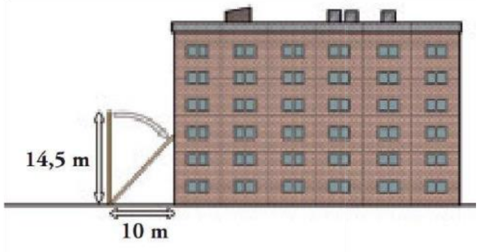
Solución: a=12m

Ejercicio 11. Una letra "N" se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separado 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?

Ejercicio 12. Una escalera de bomberos de 14,5 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 10 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?



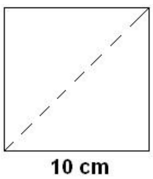
Solución: 25cm



Solución: 10,5m

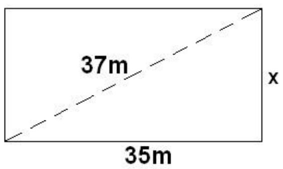
.

Ejercicio 13. Halla la medida en centímetros, de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 10 cm.

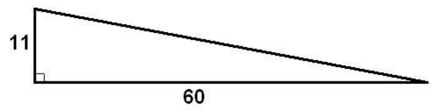
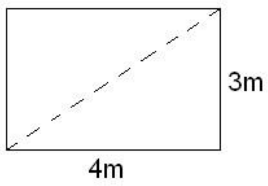


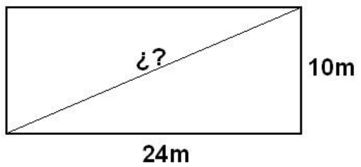
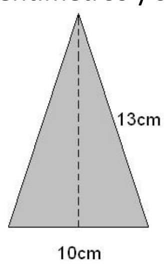
Solución: 14,14cm

Ejercicio 14. Halla la medida, en centímetros, de la altura de un rectángulo, cuya base mide 35 cm y su diagonal 37 cm:

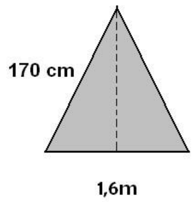


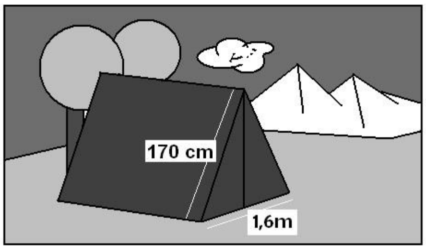
Solución: x=12m

Ejercicio 15. Una rampa de una carretera avanza 60 metros en horizontal para subir 11 metros en vertical. Calcula cuál es la longitud de la carretera.  Solución: 61m	**Ejercicio 16.** El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 y 4 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?  Solución: 5m

Ejercicio 17. Las dimensiones de un rectángulo son: base=24 m y altura=10m. Calcula la longitud de su diagonal y expresa el resultado en centímetros.  Solución: 2600cm	**Ejercicio 18.** Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la altura de un triángulo isósceles cuya base mide 10 centímetros y sus lados iguales 13 centímetros.  Solución: 12cm

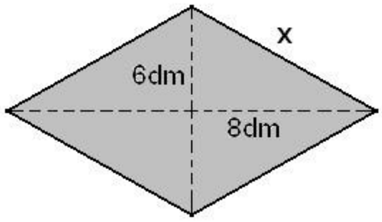
Ejercicio 19. La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 1,6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.





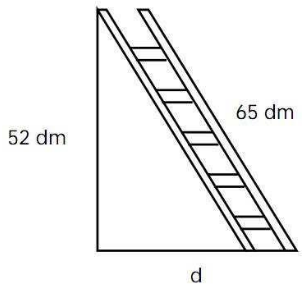
Solución: 150cm

Ejercicio 20. Calcula la medida, en decímetros, de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 decímetros.



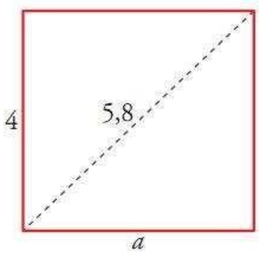
Solución: 10 dm

Ejercicio 21. Una escalera de 65 decímetros está apoyada en una pared vertical a 52 decímetros del suelo. ¿A qué distancia se encuentra de la pared el pie de la escalera?



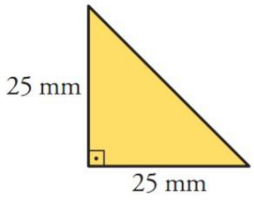
Solución: d=39dm

Ejercicio 22. En un rectángulo de altura 4 cm la diagonal es de 5,8 cm. ¿Cuánto mide la base del rectángulo?



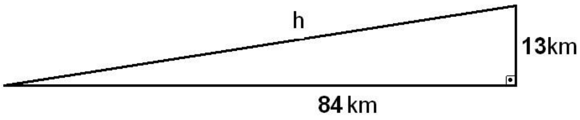
Solución: a=4,2cm

Ejercicio 23. En un triángulo isósceles y rectángulo, los catetos miden 25 milímetros cada uno, ¿Cuál es la medida de su hipotenusa?



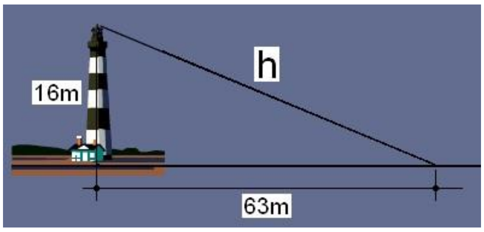
Solución: 35,36mm

Ejercicio 24. Una rampa tiene una longitud horizontal de 84 kilómetros y un altura de 13 km. ¿Cuál es la longitud de la rampa?



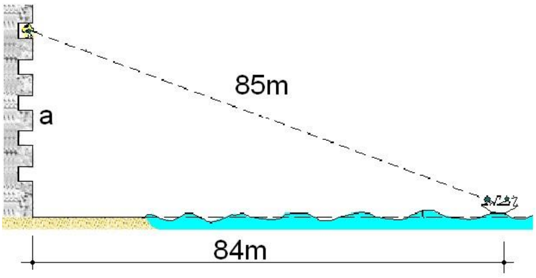
Solución: h=85km

Ejercicio 25. Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



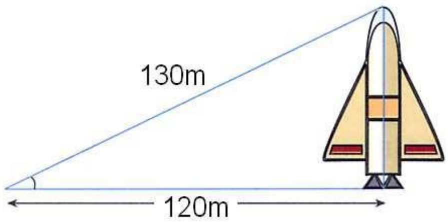
Solución: h=65m

Ejercicio 26. Desde un balcón de un castillo en la playa se ve un barco a 85 metros, cuando realmente se encuentra a 84 metros del castillo. ¿A qué altura se encuentra ese balcón?



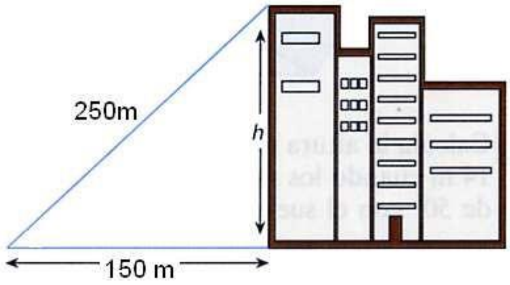
Solución: a=13m

Ejercicio 27. Si nos situamos a 120 metros de distancia de un cohete, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 130 metros. ¿Cuál es la altura total del cohete?



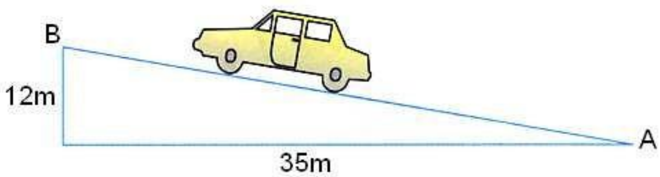
Solución: 50m

Ejercicio 28. Si nos situamos a 150 metros de distancia de un rascacielos, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 250 metros. ¿Cuál es la altura total del rascacielos?



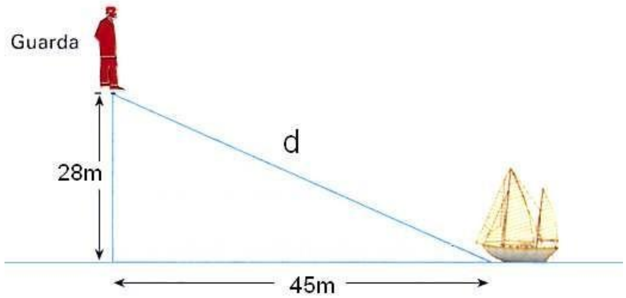
Solución: h=200m

Ejercicio 29. Un coche que se desplaza desde el punto A hasta el punto B recorre una distancia horizontal de 35 metros, mientras se eleva una altura de 12 metros. ¿Cuál es la distancia, en metros, que separa a los puntos A y B?



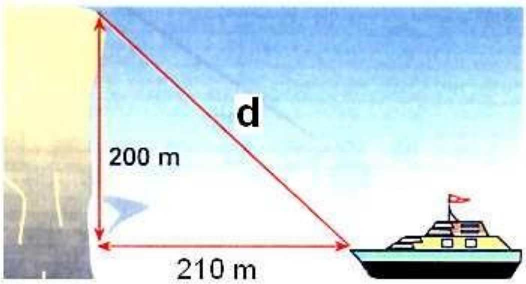
Solución: AB=37m

Ejercicio 30. Un guardacostas observa un barco desde una altura de 28 metros. El barco está a una distancia horizontal del punto de observación de 45 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, de la visual del guardacostas al barco?



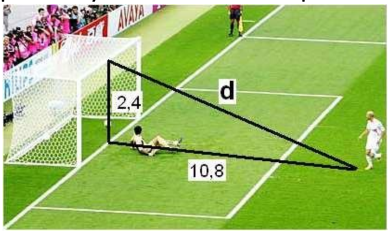
Solución: d=53m

Ejercicio 31. Desde un acantilado de 200 metros de altura se observa un barco que se encuentra a 210 metros de dicho acantilado. ¿Qué distancia, en metros, recorre la visual desde el acantilado hasta el barco?



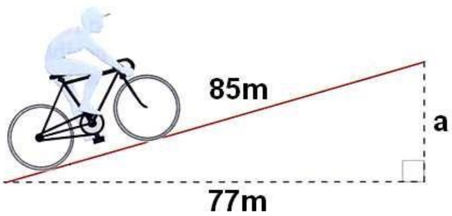
Solución: d=290m

Ejercicio 32. La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10,8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?



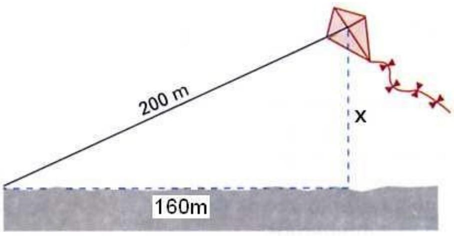
Solución: d=11,06m

Ejercicio 33. En una rampa inclinada, un ciclista avanza una distancia real de 85 metros mientras avanza una distancia horizontal de tan solo 77 metros. ¿Cuál es la altura, en metros, de esa rampa?

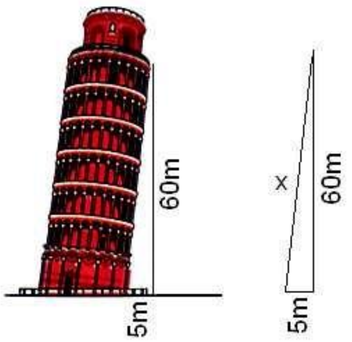
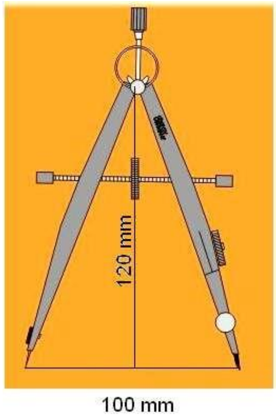


Solución: a=36m

Ejercicio 34. Una cometa está atada al suelo con un cordel de 200 metros de longitud. Cuando la cuerda está totalmente tensa, la vertical de la cometa al suelo está a 160 metros del punto donde se ató la cometa. ¿A qué altura está volando la cometa?

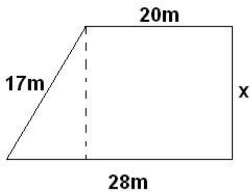


Solución: x=120m

Ejercicio 35. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?  Solución: x=60,21m	**Ejercicio 36.** Un compás de bigotera tiene separadas las puntas de sus patas 100 milímetros, mientras que la vertical desde el eje hasta el papel alcanza una altura de 120 milímetros. ¿Cuál es la medida, en milímetros, de cada una de sus patas?  Solución: 109,09mm

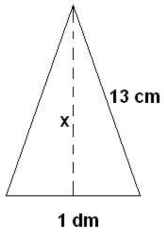
3. Cálculo de longitudes en una figura plana.

Ejercicio 37. Halla la medida de la altura de un trapecio rectángulo, cuya base mayor mide 28 metros, su base menor 20 metros y su lado oblicuo 17 metros:



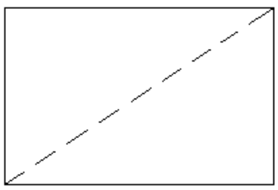
Solución: x=15m

Ejercicio 38. Halla la medida de la altura de un triángulo isósceles cuya base mide 1 decímetro y sus lados iguales 13 centímetros.



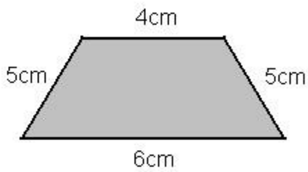
Solución: x=12cm

Ejercicio 39. El dormitorio de Pablo es rectangular; su lado mayor mide 8 metros y su perímetro total mide 28 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



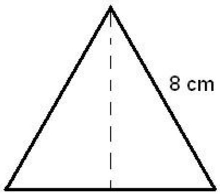
Solución: 10m

Ejercicio 40. Halla la altura de un trapecio isósceles de bases 4 y 6 centímetros, y lados iguales de 5 centímetros.



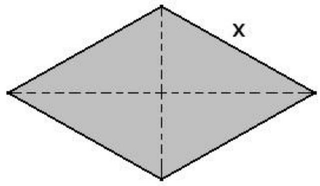
Solución: 4,90 cm

Ejercicio 41. Halla la medida de la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.



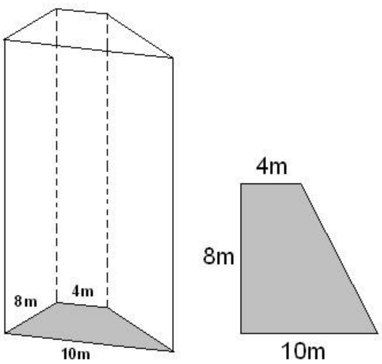
Solución: 6,93cm

Ejercicio 42. Calcula la medida de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 centímetros.



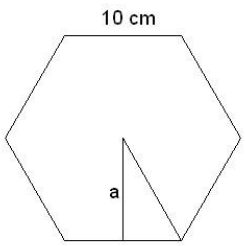
Solución: x=10cm

Ejercicio 43. El la figura se ve la planta de un rascacielos. Es un trapecio rectangular. Calcula la medida del lado oblicuo.

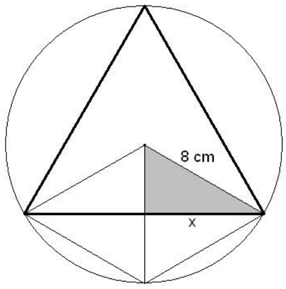
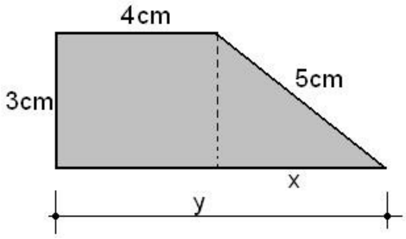
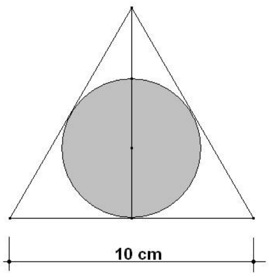
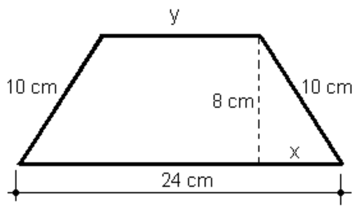


Solución: 10m

Ejercicio 44. Calcula la apotema de un hexágono regular de 10 centímetros de lado.

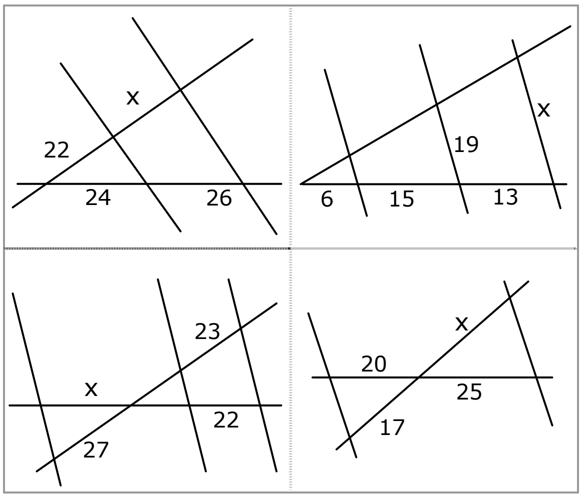


Solución: a=8,66cm

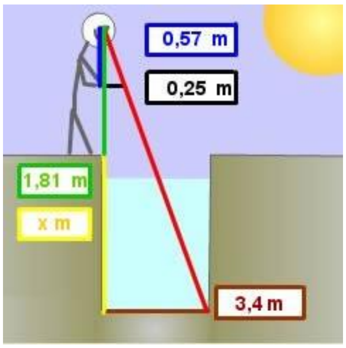
Ejercicio 45. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 8 cm, como la de la figura.  Solución: 13,86cm	**Ejercicio 46.** Calcula el perímetro de este trapecio rectángulo.  Solución: P=20cm
Ejercicio 47. En un triángulo equilátero de 10 centímetros de lado se inscribe una circunferencia. Calcula el radio de la circunferencia, sabiendo que es la tercera parte de la altura del triángulo.  	**Ejercicio 48.** Calcula el perímetro de este trapecio isósceles. 

Práctica

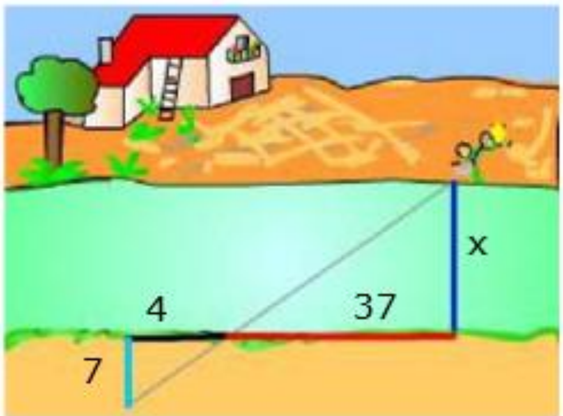
1. *Halla x en cada caso*



2. Calcula la profundidad del pozo

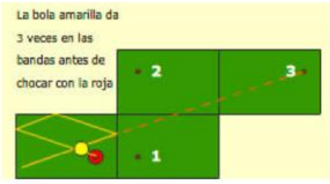


3. Calcula la anchura del río.



Billar a tres bandas

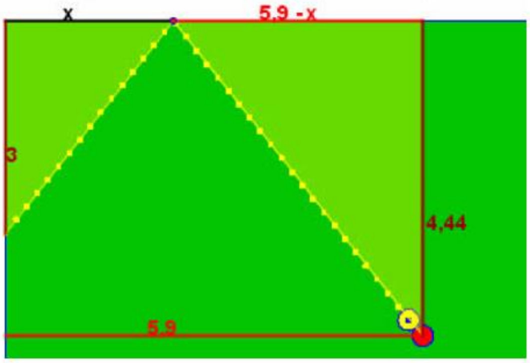
Construimos los rectángulos iguales al billar, después los puntos simétricos a la bola roja, el camino más corto entre dos puntos es la linea recta que al plegarla en el billar nos da el recorrido deseado



¿Cómo asegurar la carambola a una banda?

Como la bola incide en la banda con el mismo ángulo que rebota, habrá que conseguir que los triángulos sean semejantes, y esto se puede lograr ¡a ojo! o con precisión resolviendo la ecuación de proporcionalidad asociada a la semejanza.

$$\frac{x}{3} = \frac{5{,}9 - x}{4{,}44} \Rightarrow 4{,}44 \cdot x = 3 \cdot (5{,}9 - x); \qquad x = \frac{3 \cdot 5{,}9}{3 + 4{,}44} = 2{,}37$$



4.